

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ

(ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

Εμμ. Δρης
Καθηγητής Φυσικής
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΕΜΠολυτεχνείο

Αθήνα 2004

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι Σημειώσεις αυτές έχουν σκοπό να αποτελέσουν συνοπτικό βοήθημα για το μάθημα των Ηλεκτρονικών που διδάσκεται στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών της Κατεύθυνσης Φυσικού Εφαρμογών του ΕΜΠολυτεχνείου.

Γίνεται επεξεργασία θεμάτων θεωρίας κυκλωμάτων, αναλογικών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων με τρανζίστορ και τελεστικούς ενισχυτές καθώς και ψηφιακών κυκλωμάτων.

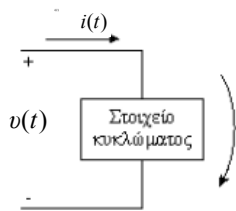
Υπάρχουν πολλά ελληνικά και ξενόγλωσσα βιβλία τα οποία διαπραγματεύονται το σχετικό αντικείμενο σε μεγαλύτερη έκταση τα οποία πρέπει να συμβουλευτεί ο ενδιαφερόμενος για μεγαλύτερη εμβάθυνση. Εδώ δίνονται οι βασικές αρχές για μια πρώτη γεύση στο αντικείμενο.

Αθήνα 19/8/2004

1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

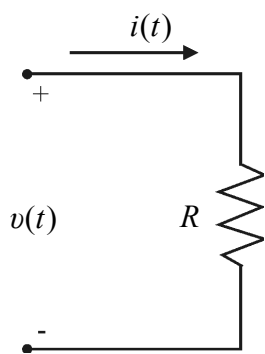
ΓΕΝΙΚΑ

Ένα στοιχείο κυκλώματος φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Σύμφωνα με τον παθητικό συμβολισμό του ρεύματος και τάσης, που σημειώνεται σε αυτό το Σχήμα, η ισχύς που ανταλλάσσει το στοιχείο κυκλώματος είναι θετική, $P = v \cdot i > 0$, όταν το στοιχείο απορροφά ισχύ ενώ είναι αρνητική, $P < 0$, όταν το στοιχείο παρέχει ισχύ. Πολλές φορές λέμε ότι έχουμε πτώση τάσης $v(t)$ στο στοιχείο κυκλώματος που δηλώνεται με βέλος όπως στο Σχήμα 1.1. Το $v = v(t)$ είναι η διαφορά δυναμικού (τάση) στα άκρα του στοιχείου που δημιουργείται ένεκα συσσώρευσης φορτίων, πρόκειται δηλαδή για ηλεκτροστατική διαφορά δυναμικού. (Ακριβέστερα έχουμε ημιστατική κατάσταση).



Σχήμα 1.1

Σχέσεις ορισμού για μονόθυρα παθητικά στοιχεία κυκλωμάτων.



Σχήμα 1.2

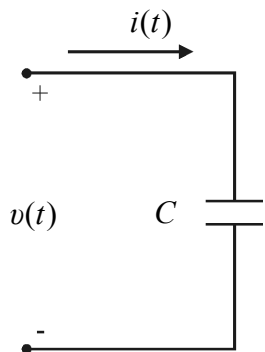
α) Ωμική αντίσταση

$$v(t) = R i(t)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = Y v(t)$$

$$Y = \frac{1}{R}$$

R είναι η αντίσταση σε Ω (ohm), Y είναι η αγωγιμότητα σε S (siemens)



Σχήμα 1.3

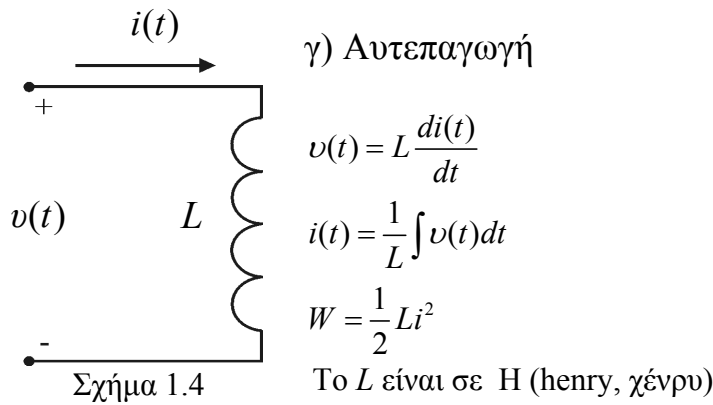
β) Χωρητικότητα

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$W = \frac{1}{2} C v^2 \quad v = \frac{1}{C} q$$

Η χωρητικότητα, C , είναι σε F (farad), η ενέργεια W είναι σε J (joule, τζουλ)



Το L είναι σε H (henry, χένρυ)

Οι περιπτώσεις που συνήθως εξετάζουμε είναι με R, L, C σταθερά.

Μπορούμε να γράψουμε,

$$v(t) = v(t_1) + \frac{1}{L} \int_{t_1}^t v(\lambda) d\lambda \quad \text{ή} \quad v(t) = v(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\lambda) d\lambda \quad \text{ή} \quad v(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\lambda) d\lambda \quad \text{όπου}$$

όταν $t = -\infty$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος.

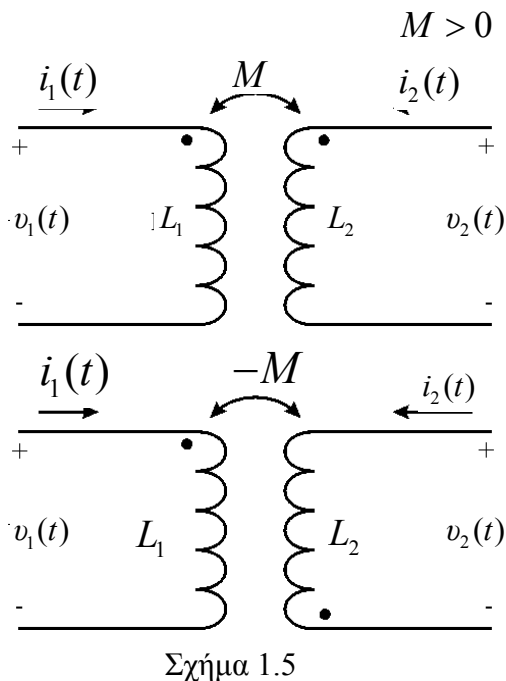
Επίσης έχουμε,

$$i(t) = i(t_1) + \frac{1}{L} \int_{t_1}^t v(\lambda) d\lambda \quad \text{ή} \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\lambda) d\lambda \quad \text{ή} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\lambda) d\lambda, \quad \text{όπου όταν}$$

$t = -\infty$ το ρεύμα στο πηνίο είναι μηδέν.

Αμοιβαία επαγωγή

Η περίπτωση συζευγμένων πηνίων είναι περίπτωση δίθυρου στοιχείου κυκλώματος. Λέμε ότι έχουμε αμοιβαία επαγωγή ή αλληλεπαγωγή.



Σύζευξη των δύο πηνίων σημαίνει ότι μαγνητική ροή από το ένα πηνίο πάει στο άλλο.

Ισχύουν,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad \text{και}$$

$$v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Για τις δυο περιπτώσεις του Σχ. 1.5 ισχύουν τα πάνω και τα κάτω πρόσημα αντιστοίχως.

Το νόημα των κουκίδων, •, είναι το

εξής. Τα τυλίγματα του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος (πηνίων) είναι έτσι που όταν τα ρεύματα i_1, i_2 κατευθύνονται προς τις αντίστοιχες κουκίδες (με τα + και - για τις τάσεις όπως στο Σχ. 1.5), τότε οι τάσεις ένεκα αμοιβαίας επαγωγής προστίθενται στις τάσεις ένεκα αυτεπαγωγής και έχουμε ίδια πρόσημα στους όρους των τάσεων που σχετίζονται με τα L_1 ή L_2 και M . Αν δεν ισχύει αυτό έχουμε αντίθετα πρόσημα.

Γενικά, για όλες τις περιπτώσεις στοιχείων κυκλωμάτων, αν αλλάξει κάποια φορά από την συμβατική που δείχνουμε στα διάφορα σχήματα, τότε αλλάζει το πρόσημο στο $v(t)$ ή $i(t)$.

Για την περίπτωση της αμοιβαίας επαγωγής τα πρόσημα σχετίζονται με την πρόσθεση ή την αφαίρεση των μαγνητικών ροών που οφείλονται στην αυτεπαγωγή και στη σύζευξη.

Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις για την αμοιβαία επαγωγή ως προς το χρόνο καταλήγουμε στις,

$$i_1(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1(\lambda) d\lambda \mp \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2(\lambda) d\lambda + i_1(0) \text{ και}$$

$$i_2(t) = \mp \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1(\lambda) d\lambda + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2(\lambda) d\lambda + i_2(0)$$

Έχουμε για την ισχύ ,

$$P(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = L_1 i_1(t) \frac{di_1}{dt} \pm M [i_1(t) \frac{di_2}{dt} + i_2(t) \frac{di_1}{dt}] + L_2 i_2(t) \frac{di_2}{dt} \text{ ή}$$

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right].$$

Ο χρόνος είναι από $-\infty$ έως t .

Αν για $t = -\infty$ είναι $i_1 = 0$, $i_2 = 0$, όπως υποθέτουμε πάντα, τότε η ενέργεια που

αποθηκεύεται στο κύκλωμα ισούται με $W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$.

Από την πεδιακή θεωρία (ηλεκτρομαγνητική θεωρία) έχουμε,

$$W(t) = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \int B^2(t) d^3x > 0 \quad \text{όπου } d^3x = \text{το στοιχείο όγκου.}$$

Αν υποθέσουμε ότι $i_1(t)/i_2(t) = x$ (αυθαίρετο), θα έχουμε

$$W = i_2^2 [1/2 L_1 \pm Mx + 1/2 L_2 x^2] \geq 0 .$$

Το i_2 είναι αυθαίρετο, άρα μπορούμε να το πάρουμε $i_2 \neq 0$ επομένως

$$\frac{1}{2} L_1 \pm Mx + \frac{1}{2} L_2 x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } t \text{ και για αυθαίρετο } x.$$

Αυτό το τριώνυμο δεν μπορεί να έχει δυο πραγματικές ρίζες διότι η ενέργεια θα άλλαζε πρόσημο και θα γίνονταν αρνητική, πράγμα άτοπο αφού $W \geq 0$. Επομένως το τριώνυμο έχει μόνο δυο (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες ή μια πραγματική ρίζα στην οποία μηδενίζεται και επομένως εκεί είναι και το ελάχιστο της συνάρτησης.

Οι ρίζες δίνονται από τις σχέσεις,

$$x_{1,2} = (-M \pm \sqrt{M^2 - L_1 L_2}) / L_2 \text{ για } +M$$

$$x_{1,2} = (M \pm \sqrt{M^2 - L_1 L_2}) / L_2 \text{ για } -M$$

Πρέπει επομένως $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$.

Ορίζεται το $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ ως ο συντελεστής σύζευξης, $0 \leq k \leq 1$.

Αν $M^2 = L_1 L_2$ και $L_1, L_2 \rightarrow \infty$ ενώ L_1/L_2 πεπερασμένο, τότε έχουμε την περίπτωση ιδανικού μετασχηματιστή. $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2 = a^2$ όπου N_1, N_2 οι σπείρες των

τυλιγμάτων πρωτεύοντος και δευτερεύοντος αντιστοίχως και α ο λόγος σπειρών που λέγεται λόγος μετασχηματιστή.

Έχουμε,

$$v_1 / L_1 = di_1/dt \pm (M / L_1) di_2/dt \text{ και } v_2/(\pm M) = di_1/dt + [L_2/(\pm M)] di_2/dt$$

Εφόσον $M^2 - L_1 L_2 = 0$ προκύπτει εύκολα ότι

$$v_1(t)/L_1 = v_2(t)/(\pm M) \text{ ή } v_2 = N_2 / N_1 v_1 = (1/\alpha) v_1 \text{ (εξετάζοντας μόνο το θετικό$$

πρόσημο)

Εφόσον $L_1 \rightarrow \infty$ έχουμε κατά προσέγγιση

$$0 = di_1/dt \pm (M / L_1) di_2/dt$$

Ισχύουν $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ και $M / L_1 = k \sqrt{L_2 / L_1} = \text{πεπερασμένο}$

και τελικώς $di_2/dt = - (L_1/M) di_1/dt$ (για θετικό πρόσημο, $+M$).

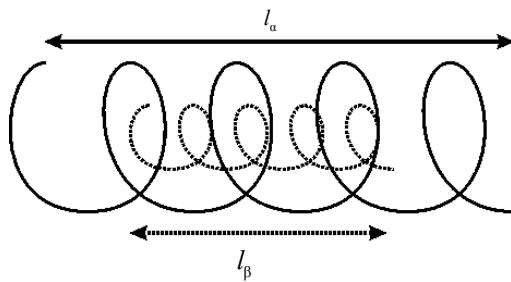
Ολοκληρώνουμε από $-\infty$ έως t οπότε

$$i_2 = - (L_1 / M) i_1$$

Αφού $M^2 = L_1 L_2$ έχουμε $L_1 / M = M / L_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \alpha$ (λόγος μετασχηματιστή).

$$\text{Άρα } i_2 = - \alpha i_1 = - (N_1/N_2) i_1$$

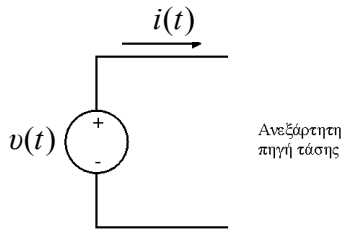
k είναι το ποσοστό της ολικής ροής του ενός πηνίου που διέρχεται από το άλλο πηνίο. Για πηνία μεγάλου μήκους σε σχέση με τη διάμετρό τους έχουμε (βλ. Σχ. 1.6),



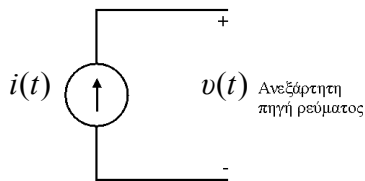
Σχήμα 1.6

$$0 \leq k = \left(\frac{l_\beta}{l_\alpha} \right)^{1/2} \leq 1.$$

ΕΝΕΡΓΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ



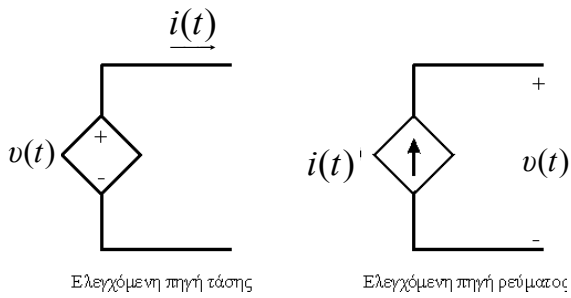
Υπάρχουν ανεξάρτητες (ιδανικές) πηγές τάσης και ανεξάρτητες (ιδανικές) πηγές ρεύματος.



Τα $i(t)$ και $v(t)$ των πηγών που σημειώνονται στο Σχ. 1.7 δεν εξαρτώνται από το φόρτο (το φορτίο) που συνδέεται με την πηγή.

Σχήμα 1.7

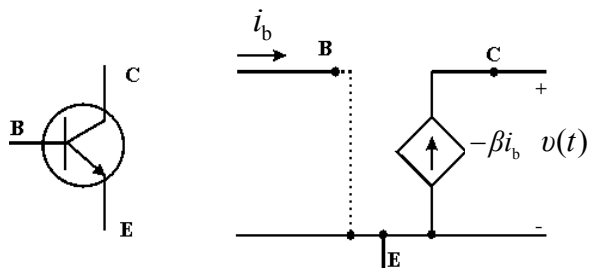
Οι ελεγχόμενες πηγές τάσης και ρεύματος αντιστοίχως φαίνονται στο Σχ. 1.8.



Σχήμα 1.8

Στην περίπτωση ελεγχόμενων πηγών η τάση $v(t)$ και το ρεύμα $i(t)$ στο Σχ. 1.8 εξαρτώνται από κάποιο άλλο ρεύμα ή τάση, γι' αυτό αυτές οι πηγές λέγονται εξαρτώμενες ή ελεγχόμενες.

Παράδειγμα

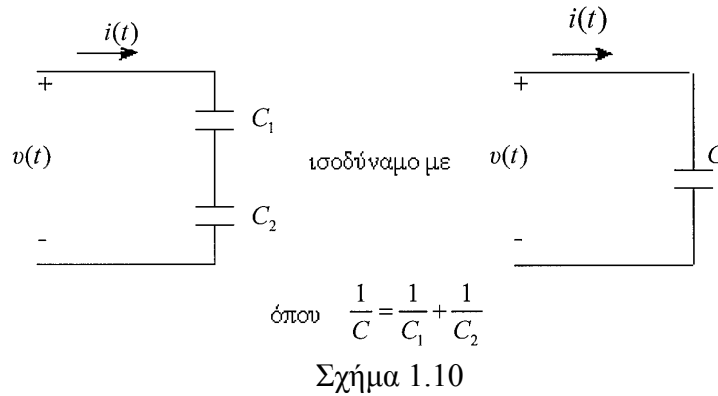


Σχήμα 1.9

Ισοδύναμο κύκλωμα τρανζίστορ με ελεγχόμενη από ρεύμα πηγή ρεύματος.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Αν δύο τμήματα κυκλωμάτων έχουν ίδια τάση στα άκρα τους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, τότε λέγονται ισοδύναμα. Βλέπε Σχ. 1.10.



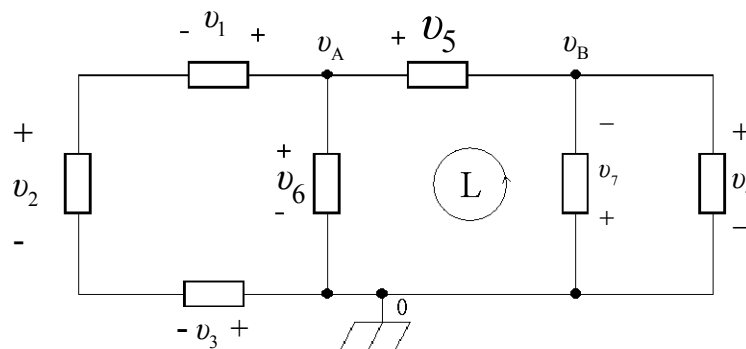
ΚΑΝΟΝΕΣ (ΝΟΜΟΙ) ΤΟΥ ΚΙΡΧΗΟΦΦ

1) ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΩΝ ΒΡΟΧΩΝ (ΤΑΣΕΩΝ).

Για κάθε (κλειστό) βρόχο κυκλώματος ισχύει , $\sum_k v_k(t) = 0$ όπου $v_k(t)$ οι στιγμιαίες τάσεις στα άκρα των στοιχείων του βρόχου.

Αυτός ο νόμος σχετίζεται με το γεγονός ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο οπότε $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Επίσης σχετίζεται με τη διατήρηση της ενέργειας.

Το Σχ. 1.11 δείχνει μια εφαρμογή αυτού του νόμου.



Σχήμα 1.11

Ας συγκεντρωθούμε στο βρόχο (L) με τα στοιχεία 5, 7, 6. Ακολουθούμε τον εξής κανόνα: Λαμβάνονται με πρόσημο + οι τάσεις που αντιστοιχούν σε στοιχεία που διατρέχονται, κατά τη διαδρομή (διαγραφή) του βρόχου, έτσι που από το θετικό (+) άκρο τους πάμε στο αρνητικό (-). Μπορεί κάποιος να ακολουθήσει τον αντίθετο κανόνα αρκεί να το κάνει με συνέπεια.

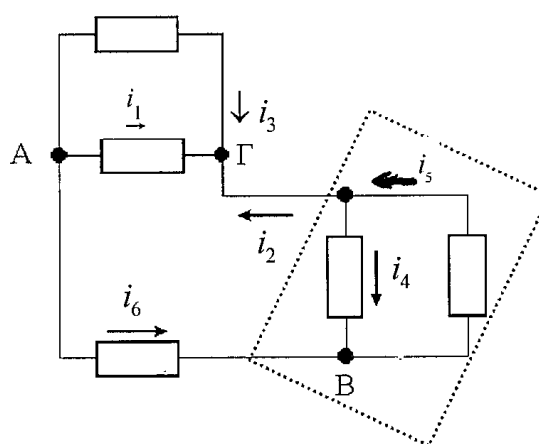
Στην περίπτωσή μας έχουμε, $v_7 - v_5 + v_6 = 0$.

Κατόπιν γράφουμε τις σχέσεις μεταξύ των v_k και των αντίστοιχων i_k , όπου ακολουθούμε τους ορισμούς για τα στοιχεία κυκλώματος που αναφέραμε για τα R, L, C, M . Τα v_k μπορεί επίσης να εκφραστούν ως διαφορές δυναμικών των άκρων του σχετικού στοιχείου κυκλώματος ως προς κάποιο σημείο αναφοράς το οποίο θεωρείται ότι έχει δυναμικό μηδέν, (κομβικά δυναμικά), π.χ. $v_5 = v_A - v_B$.

2) ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΚΙΡΧΗΟΦ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ (ΤΩΝ ΡΕΥΜΑΤΩΝ).

Για κάθε σημείο, κόμβο, κυκλώματος ισχύει, $\sum_k i_k(t) = 0$.

Θεωρούμε, συνήθως, τα ρεύματα που πάνε προς τον κόμβο αρνητικά και αυτά που απομακρύνονται θετικά. Για τον κόμβο Α στο Σχ. 1.12 έχουμε, $i_3 + i_1 + i_6 = 0$.



Σχήμα 1.12

Για τον κόμβο Γ στο Σχ. 1.12 έχουμε, $-i_1 - i_2 - i_3 = 0$. Για τον κόμβο Β έχουμε, $-i_6 - i_4 - i_5 = 0$. Μια άλλη μορφή αυτού του νόμου σχετίζεται με κλειστή επιφάνεια, όπως αυτή με τη διακεκομμένη περίμετρο στο Σχ. 1.12. Ισχύει, $-i_5 - i_4 - i_6 = 0$.

Ο νόμος αυτός έχει να κάνει με το γεγονός ότι κάθε χρονική στιγμή πουθενά στο κύκλωμα δεν γίνεται (πρακτικώς) συγκέντρωση φορτίου. Εδώ εξετάζουμε φαινόμενα ημιστατικής όπου ο ρυθμός μεταβολής της έντασης ηλεκτρικού πεδίου στις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις είναι αμελητέος σε σχέση με τους άλλους όρους (σχετικά χαμηλές συχνότητες). Παραλείπεται ο όρος του ρεύματος μετατόπισης. Τα ανωτέρω σημαίνουν ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα διάδοσης. Μπορούμε να πούμε και το εξής, στη θεωρία κυκλωμάτων οι διαστάσεις του κυκλώματος είναι μικρές και μία ηλεκτρομαγνητική διαταραχή σε κάποιο σημείο του κυκλώματος διαδίδεται στιγμιαία σε όλα τα σημεία του κυκλώματος.

Πολλές φορές ο κανόνας των τάσεων γράφεται στη μορφή, $\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_l v_l$, όπου

τα \mathcal{E}_k παριστάνουν Η.Ε.Δ. (ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις). Για πηνίο $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$

(ενώ η (πτώση) τάση(ς) είναι $v = L \frac{di}{dt}$). Η Η.Ε.Δ. γράφεται στην άλλη πλευρά της

σχέσης του νόμου των τάσεων. Ουσιαστικά μεταφέρεται η τάση, αλλάζει πρόσημο και ισούται με την Η.Ε.Δ. Η Η.Ε.Δ. ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο που να εμφανίζεται

αυτό το πρόσημο όταν ξεκινά κάποιος από βασικές έννοιες όπως η δύναμη ανά μονάδα φορτίου που ασκείται ένεκα Η.Ε.Δ. στους φορείς του ρεύματος.

ΚΟΜΒΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

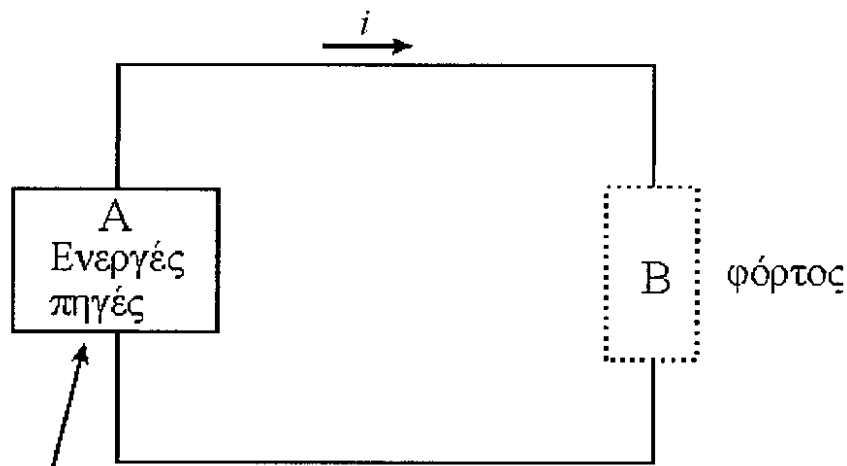
Η κατάστρωση του συστήματος των εξισώσεων με τους αγνώστους που πρέπει να προσδιοριστούν, διευκολύνεται πολύ με την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων (κομβική ανάλυση). Η μέθοδος στην απλούστερη μορφή της, συνίσταται στη χρήση του κανόνα των ρευμάτων (των κόμβων) του Kirchhoff για κάθε κόμβο εκτός ενός ο οποίος είναι ο κόμβος αναφοράς (με δυναμικό μηδέν). Προηγουμένως γράφονται οι σχέσεις των ρευμάτων των κλάδων συναρτήσει των δυναμικών των αντίστοιχων κόμβων (των διαφορών τους) και των εμπεδήσεων των κλάδων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων είναι ίσος με το πλήθος όλων των κόμβων μείον ένα. Για το Σχήμα 1.11 έχουμε για τους κόμβους Α και Β τις δυο εξισώσεις αντιστοίχως,,

$$\frac{v_A - 0}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{v_A - 0}{R_6} + \frac{v_A - v_B}{R_5} = 0$$

$$-\frac{v_A - v_B}{R_5} - \frac{0 - v_B}{R_7} + \frac{v_B - 0}{R_4} = 0$$

Από τη λύση του συστήματος μπορεί να προσδιοριστούν τα άγνωστα στοιχεία.

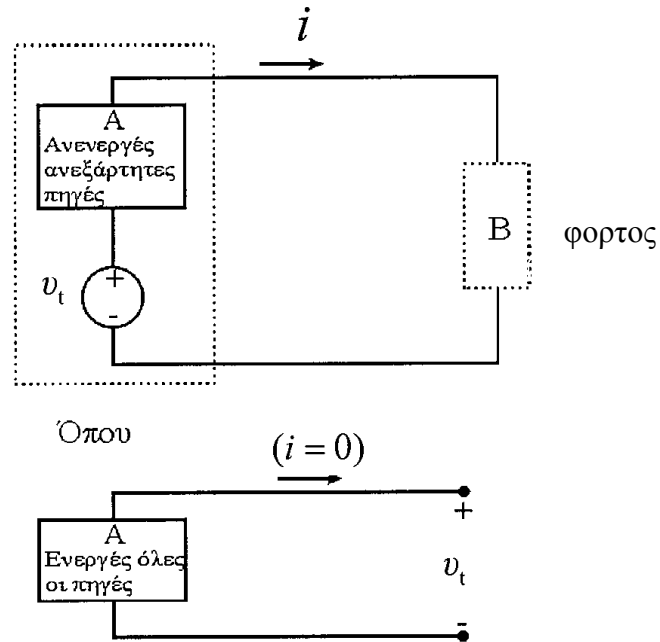
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ THEVENIN



Υπάρχουν γενικώς παθητικά στοιχεία, ανεξάρτητες και ελεγχόμενες πηγές

Σχήμα 1.13

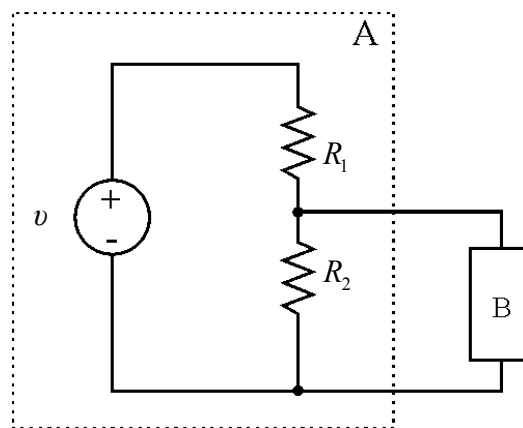
Το κύκλωμα στο Σχήμα 1.13 είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα στο Σχήμα 1.14 με την έννοια ότι για τον ίδιο φόρτο το ρεύμα i (και η τάση στα άκρα του φόρτου) είναι ίδια.



Σχήμα 1.14

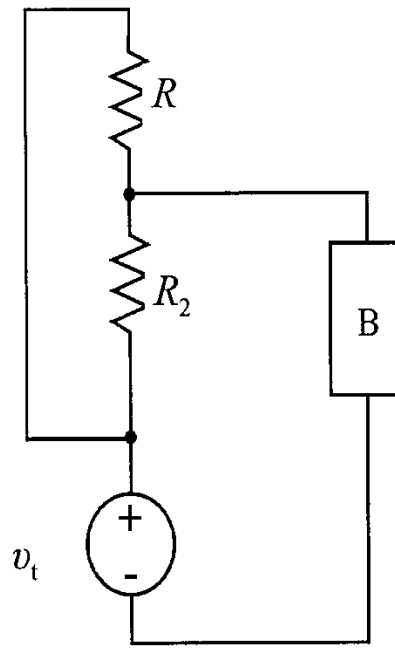
Ανενεργές ανεξάρτητες πηγές σημαίνει ότι, αν είναι πηγές τάσης δεν έχουν τάση στα άκρα τους και άρα είναι βραχυκυκλωμένες, ενώ αν είναι πηγές ρεύματος τότε δεν παρέχουν ρεύμα και άρα ο κλάδος τους είναι ανοιχτός (διακοπή στο κύκλωμα).

Παράδειγμα



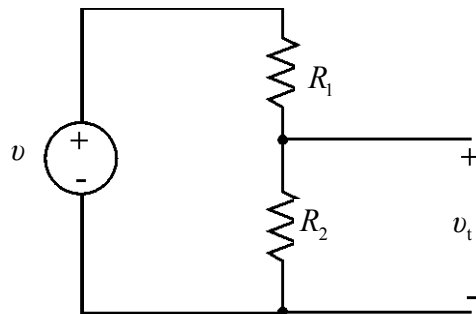
Σχήμα 1.15

Το κύκλωμα του Σχ. 1.15 είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα του Σχ. 1.16 ,



Σχήμα 1.16

όπου το v_t βρίσκεται από το κύκλωμα του Σχ. 1.17.



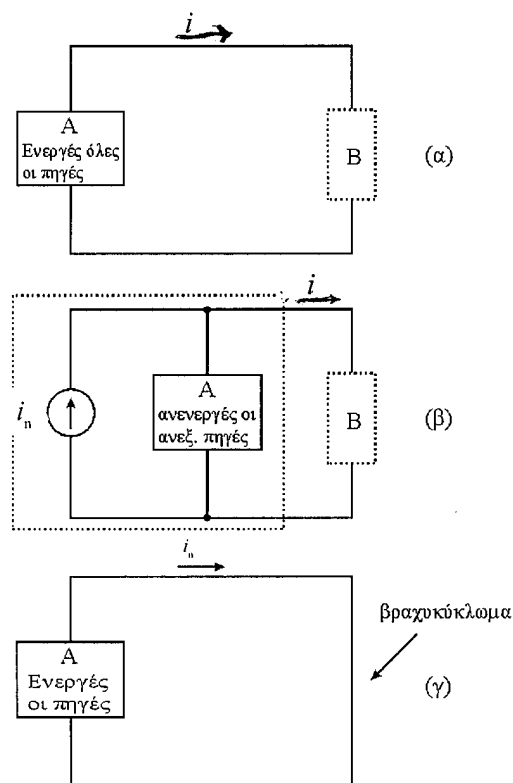
(Ανοιχτό κύκλωμα χωρίς φόρτο)

Σχήμα 1.17

$$\text{άρα, } v_t = v \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΝΟΡΤΟΝ

Αυτό το θεώρημα λέει ότι το κύκλωμα στο Σχ. 1.18α είναι ισοδύναμο με αυτό του Σχ. 1.18β όπου το i_n της πηγής ρεύματος υπολογίζεται από το κύκλωμα του Σχ. 1.18γ.



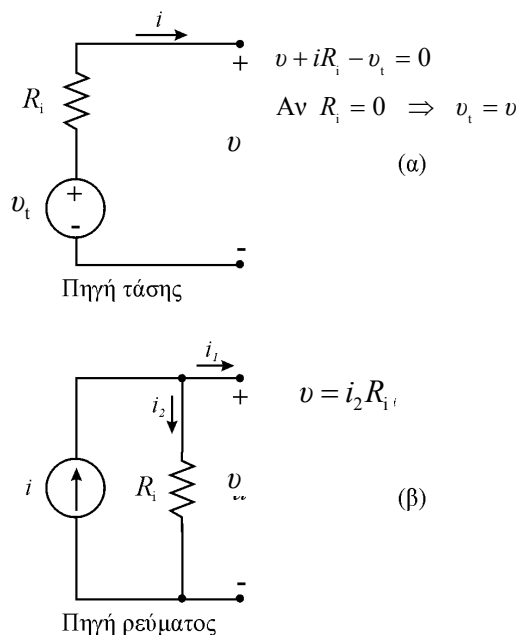
Σχήμα 1.18

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

Σε ένα κύκλωμα μπορεί κάποιος να θεωρήσει ότι κάποιες ανεξάρτητες πηγές είναι ανενεργές, να λύσει το πρόβλημα και στη συνέχεια να ενεργοποιήσει αυτές τις πηγές ενώ τις υπόλοιπες τις απενεργοποιεί, να λύσει το νέο πρόβλημα και να προσθέσει τα αποτελέσματα. Τη διαδικασία αυτή μπορεί να την κάνει με κατάλληλο τρόπο πολλές φορές. Αυτή η αρχή που είναι η αρχή της επαλληλίας στηρίζεται στη γραμμικότητα των σχέσεων που διέπουν τα κυκλώματα. Ανάλογα ισχύουν στην κίνηση (στη δυναμική) όπου ισχύει η αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων διότι οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές.

ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

Η τάση v_t είναι η τάση στα άκρα της ιδανικής πηγής. Η v λέγεται πολική τάση και όταν παρέχεται ρεύμα σε εξωτερικό κύκλωμα (φόρτο) η $v < v_t$. Αν $i = 0$ τότε $v = v_t$



Σχήμα 1.19

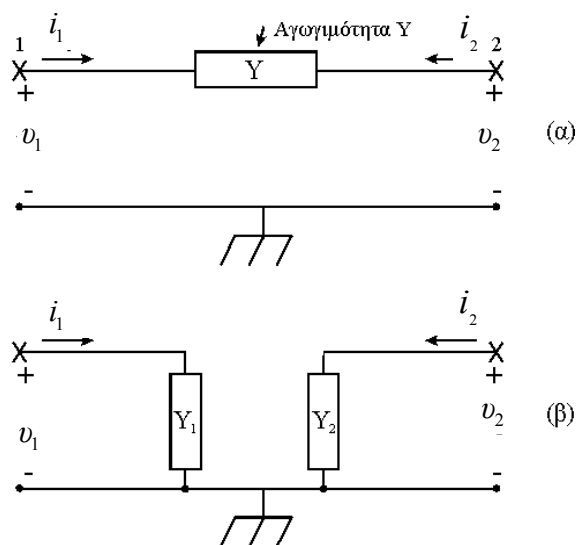
Στην περίπτωση μη ιδανικής πηγής ρεύματος η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι παράλληλα με την ιδανική πηγή ρεύματος. Στην περίπτωση μη ιδανικής πηγής τάσης η εσωτερική αντίσταση είναι σε σειρά με την ιδανική πηγή τάσης.

Προφανώς σύμφωνα με τα θεωρήματα thevenin και norton μπορεί να δειχτεί ότι μη ιδανική πηγή τάσης v_t με εσωτερική αντίσταση R_i v_t ισοδυναμεί με πηγή ρεύματος

$i_n = \frac{v_t}{R_i}$ παράλληλα με αντίσταση R_i . Πηγή ρεύματος i_n με εσωτερική αντίσταση R_i

ισοδυναμεί με πηγή τάσης $v_t = i_n R_i$ σε σειρά με αντίσταση R_i .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ MILLER



Σχήμα 1.20

Το θεώρημα του Miller λέει ότι τα κυκλώματα των Σχημάτων 1.20α και 1.20β είναι ισοδύναμα με την έννοια ότι τα ρεύματα i_1, i_2 προς τα εξωτερικά κυκλώματα (παριστάνονται με X,X) είναι ίδια. Πράγματι, έστω $v_2 = k v_1$ και ότι το k είναι γνωστό. Έχουμε τα Y_1, Y_2 (που πρέπει να προσδιορίσουμε ώστε το κύκλωμα του Σχ. 1.20β να είναι ισοδύναμο με αυτό του Σχ. 1.20α όπου το Y είναι δεδομένο. Έχουμε

$$i_1 = Y(v_1 - v_2) = Yv_1(1 - \frac{v_2}{v_1}) = Yv_1(1 - k). \text{ Για να είναι ισοδύναμα τα δύο κυκλώματα}$$

(άρα τα i_1, i_2 ίδια όπως στο πρώτο κύκλωμα), πρέπει η Y_1 να είναι τέτοια ώστε $i_1 = Y_1 v_1$ άρα $Y_1 = Y(1 - k)$. Για τον κόμβο 2 στο Σχ. 1.20α έχουμε $i_2 = -i_1$ και

$$i_2 = Y(v_2 - v_1) = Yv_2(1 - \frac{v_1}{v_2}) \text{ ή } i_2 = Y(1 - \frac{v_1}{v_2})v_2. \text{ Άρα πρέπει για την ισοδυναμία τους}$$

$$\text{να ισχύει } Y_2 v_2 = i_2 \text{ ή } Y_2 = Y(1 - \frac{1}{k}).$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΝΩΜΑΛΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Όταν οι τάσεις και τα ρεύματα σε κάποιο κύκλωμα είναι πεπερασμένα, τότε η τάση στα άκρα πυκνωτή του κυκλώματος και το ρεύμα που διέρχεται από πηνίο του κυκλώματος είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

Πράγματι,

α) για πυκνωτή ισχύει, $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$. Αν το $v(t)$ μεταβληθεί απότομα οπότε δεν

είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου αλλά έχει συμπεριφορά βηματικής συνάρτησης, συνάρτησης heaviside, $\theta(t)$, τότε $v = v_a \theta(t)$ και $i(t) = C v_a \delta(t - t_0)$, όπου $\delta(t - t_0)$ συνάρτηση δέλτα, κρουστική συνάρτηση.

Αυτό σημαίνει ότι το $i(t)$ θα γίνει στιγμιαία άπειρο, πράγμα άτοπο σύμφωνα με την υπόθεσή μας ότι το ρεύμα είναι πεπερασμένο. Άρα το $v(t)$ δεν μπορεί να μεταβληθεί απότομα αλλά πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου.

β) Για αυτεπαγωγή έχουμε, $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Αν το $i(t)$ μεταβληθεί απότομα και δεν

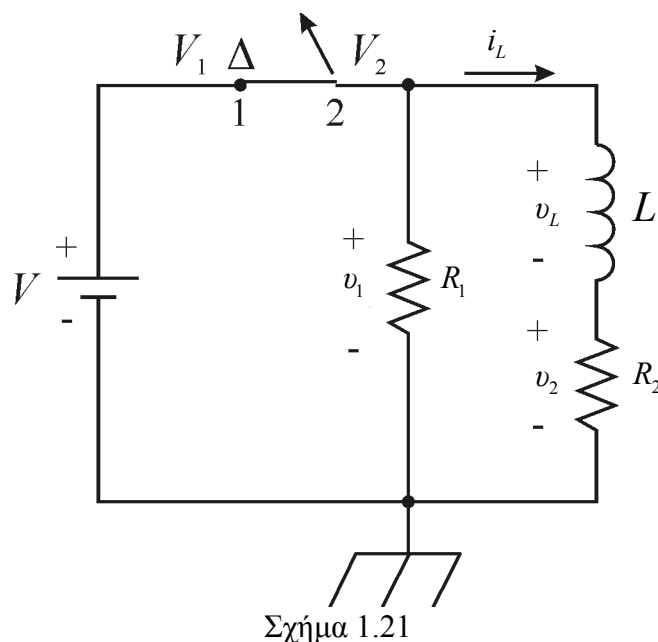
είναι επομένως συνεχής συνάρτηση του χρόνου, τότε το $v(t)$ είναι ανάλογο του $\delta(t - t_0)$ άρα στιγμιαία άπειρο πράγμα άτοπο γιατί είπαμε ότι το $v(t)$ είναι πεπερασμένο. Άρα το $i(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου.

Λέμε ότι το πηνίο παρουσιάζει αδράνεια στις μεταβολές ρεύματος και ο πυκνωτής στις μεταβολές τάσης.

Αφού $W = \frac{1}{2} C v^2$ και $W = \frac{1}{2} L i^2$, εννοείται ότι η τάση σε πυκνωτή και το ρεύμα σε

πηνίο πρέπει να είναι πεπερασμένα (κάθε πεπερασμένη χρονική στιγμή) γιατί αλλιώς η αποθηκευμένη ενέργεια θα ήταν άπειρη. Κυκλώματα που δεν ικανοποιούν αυτή την απαίτηση δεν είναι «καλά» μοντέλα πραγματικών κυκλωμάτων.

Παράδειγμα



$$V = 100 \text{ V}, R_1 = 20 \text{ } \Omega, R_2 = 5,0 \text{ } \Omega, L = 10 \text{ H}.$$

Ο διακόπτης ανοίγει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να βρεθούν

α) Το $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+}$

β) Το $v_\Delta = V_1 - V_2$ για $t = 0_+$ (τάση στα άκρα του διακόπτη)

γ) Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας του πηνίου για $t = 0_+$.

Λύση

α) $i_L = \frac{V}{R_2}$ ($t \leq 0$). Το i_L είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου άρα:

$$i_L(0_-) = \frac{V}{R_2} = i_L(0_+) = \frac{100 \text{ V}}{5 \text{ } \Omega} = 20 \text{ A} = I_0.$$

Έχουμε το νόμο του Kirchhoff για τις τάσεις, $L \frac{di_L}{dt} + i_L R_2 + i_L R_1 = 0$. Η διαφορική

εξίσωση είναι ομογενής και άρα έχει λύση της μορφής, $ke^{\rho t}$ όπου προφανώς

$\rho = -\frac{R_1 + R_2}{L}$. Άρα, $i_L(t) = ke^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}$. Αφού $i_L(0_+) = I_0$ έχουμε $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}$. Άρα,

$$\frac{di_L}{dt} = -I_0 \frac{R_1 + R_2}{L} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}. \text{ Για } t = 0_+ \text{ έχουμε } \frac{di_L(0_+)}{dt} = -I_0 \frac{R_1 + R_2}{L} \text{ άρα}$$

$$\frac{di_L(0_+)}{dt} = -20 \frac{5 + 20}{10} \frac{\text{A}}{\text{s}} = -50 \frac{\text{A}}{\text{s}}.$$

β) Το ρεύμα της R_1 είναι από κάτω προς τα πάνω άρα η $V_2 = v_1$ είναι αρνητική,

$$V_2 = v_1 = -i_L R_1 = -I_0 R_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}, \text{ για } t = 0_+ \quad v_1(0_+) = V_2 = -20 \times 20 \text{ V} = -400 \text{ V}, \text{ άρα}$$

$$v_\Delta = (100 - (-400)) \text{ V} = 500 \text{ V}.$$

γ) Προφανώς ο ρυθμός απώλειας ενέργειας του πηνίου βρίσκεται εύκολα αφού,

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t). \quad \text{Έχουμε} \quad \frac{dW_L}{dt} = L i_L \frac{di_L}{dt} \quad \text{άρα} \quad \frac{dW_L(0_+)}{dt} = L I_0 \frac{di_L(0_+)}{dt} \Rightarrow$$

$$dW_L/dt(0_+) = -10 \times 20 \times 50 \text{ J/s} = -10\,000 \text{ J/s}$$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ (ΦΑΣΟΡΕΣ)

Έστω ότι σε κάποιο κύκλωμα έχουμε διέγερση της μορφής $x e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ (μόνιμο φαινόμενο). Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές άρα η απόκριση είναι της μορφής, $y e^{j(\omega t + \varphi_2)}$ όπου τα $x, y, \omega, \varphi_1, \varphi_2$ πραγματικά. Προφανώς οι διεγέρσεις $\text{Re}[x e^{j(\omega t + \varphi_1)}] = x \cos(\omega t + \varphi_1)$ και $\text{Im}[x e^{j(\omega t + \varphi_1)}] = x \sin(\omega t + \varphi_1)$

οδηγούν στις αποκρίσεις $\text{Re}[y e^{j(\omega t + \varphi_2)}] = y \cos(\omega t + \varphi_2)$ και

$$\text{Im}[y e^{j(\omega t + \varphi_2)}] = y \sin(\omega t + \varphi_2), \text{ αντιστοίχως.}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε ένα (πραγματικό) αρμονικό με το χρόνο φυσικό μέγεθος (τάση, ρεύμα), ένα μιγαδικό μέγεθος του οποίου το πραγματικό (ή το φανταστικό) μέρος είναι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει. Ορίζονται μιγαδικές αντιστάσεις και άλλα φυσικά μεγέθη χαρακτηριστικά των στοιχείων κυκλωμάτων για τα μιγαδικά μεγέθη και αυτό διευκολύνει, όπως θα δούμε, την ανάλυση των κυκλωμάτων.

Θεώρημα 1

Αν έχουμε δύο μιγαδικούς $A e^{j\omega t}$ και $B e^{j\omega t}$ όπου ω πραγματικός και A, B γενικώς μιγαδικά, τότε αν $\text{Re}(A e^{j\omega t}) = \text{Re}(B e^{j\omega t})$ για κάθε t , θα ισχύει και $A = B$. Ισχύει και το αντίστροφο. Το Re μπορεί να αντικατασταθεί με το Im (δυϊκότητα).

Απόδειξη.

Για $t = 0$ έχουμε $\text{Re}(A) = \text{Re}(B)$. Αν θεωρήσουμε ότι $t = \frac{2\omega}{\pi}$, τότε $e^{j\omega t} = j$ άρα

$\text{Re}(A j) = \text{Re}(B j)$. Έστω $A = A_1 + j A_2$, $B = B_1 + j B_2$ όπου A_1, A_2, B_1, B_2 πραγματικά τότε $\text{Re}(j A_1 - A_2) = (j B_1 - B_2)$ άρα $A_2 = B_2$ δηλαδή $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$ άρα $A = B$.

Το αντίστροφο είναι προφανές. Ανάλογα δείχνεται και η περίπτωση όπου ισχύει $\text{Im}(A e^{j\omega t}) = \text{Im}(B e^{j\omega t})$.

Θεώρημα 2

Αν $\alpha = \text{Re}(Ae^{j\omega t})$ τότε $\frac{d\alpha}{dt} = \text{Re}(j\omega Ae^{j\omega t})$.

Απόδειξη

Από τη σχέση $B(t) = B_1(t) + j B_2(t) = Ae^{j\omega t}$, (B_1, B_2 πραγματικοί) έχουμε

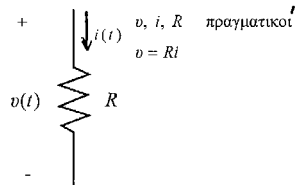
$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_1}{dt} + j \frac{dB_2}{dt} = Aj\omega e^{j\omega t}. \text{ Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 1}$$

$$\text{Re}\left(\frac{dB}{dt}\right) = \text{Re}(j\omega Ae^{j\omega t}).$$

Επομένως αν $\alpha = \text{Re}(Ae^{j\omega t})$ έπεται ότι $\frac{d\alpha}{dt} = \text{Re}(j\omega Ae^{j\omega t})$.

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ (ΕΜΠΕΔΗΣΕΩΝ)

α) Ωμική αντίσταση (αντίσταση)



Σχήμα 1.22

Για αρμονική τάση και ρεύμα έστω ότι

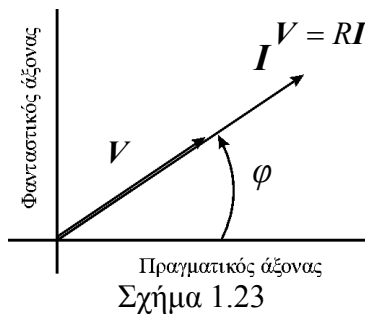
$$v = \text{Re}(\hat{v}e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}) = \hat{v} \cos(\omega t + \varphi_1). \text{ Επίσης}$$

$$i = \text{Re}(\hat{i}e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad v = \text{Re}(V e^{j\omega t}) \text{ όπου}$$

$$V = \hat{v}e^{j\varphi_1} \text{ και } i = \text{Re}(I e^{j\omega t}) \text{ όπου } I = \hat{i}e^{j\varphi_2},$$

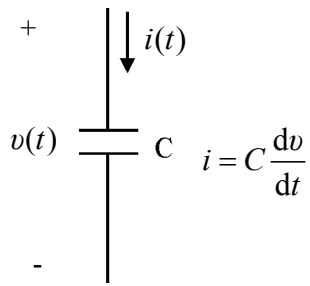
\hat{v}, \hat{i} πραγματικά. Τα V, I λέγονται φάσορες ή παραστατικοί μιγαδικοί και παριστάνονται με βέλη στο μιγαδικό επίπεδο και συμβολίζονται, όπως τα διανύσματα, με παχιά (bold) γράμματα. Αφού ισχύει

$v = Ri$ έχουμε, $\text{Re}(V e^{j\omega t}) = R \cdot \text{Re}(I e^{j\omega t}) = \text{Re}(R I e^{j\omega t})$, άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα (Θεώρημα 1) $V = R I$. Ορίζουμε τη μιγαδική αντίσταση (ωμική) ως, $Z_R = R = V / I$.



Οι φάσεις (ορίσματα) των μιγαδικών μεγεθών, σε αυτή τη περίπτωση είναι ίδιες. $V = \hat{v}e^{j\varphi_1}$, $I = \hat{i}e^{j\varphi_2}$.

β) Χωρητική αντίδραση (αντίσταση)

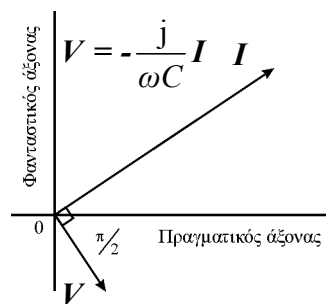


Σχήμα 1.24

Έστω τα αρμονικά μεγέθη $v = \text{Re}(Ve^{j\omega t})$, $i = \text{Re}(Ie^{j\omega t})$ με φάσορες $V = \hat{v}e^{j\phi_1}$ και $I = \hat{i}e^{j\phi_2}$. Από τη σχέση $v = \text{Re}(Ve^{j\omega t})$ προκύπτει σύμφωνα με το Θεώρημα 2 ότι $\frac{dv}{dt} = \text{Re}(V j\omega e^{j\omega t})$. Όμως $i = C \frac{dv}{dt}$ άρα

$\text{Re}(Ie^{j\omega t}) = \text{Re}(V j\omega C e^{j\omega t})$. Επομένως (Θεώρημα 1) $I = j\omega C V$. Ορίζουμε τη μιγαδική χωρητική αντίδραση (αντίσταση)

$$Z_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$



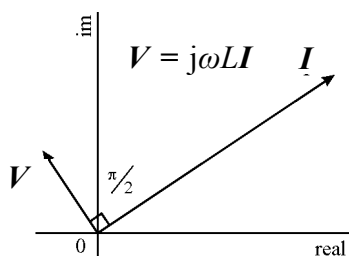
Σχήμα 1.25

Όπως φαίνεται στο Σχ. 1.25 η τάση ακολουθεί το ρεύμα με καθυστέρηση 90° .

γ) Επαγωγική αντίδραση (αντίσταση)

Έχουμε $v = L \frac{di}{dt}$. Έστω $v = \text{Re}(Ve^{j\omega t})$, $i = \text{Re}(Ie^{j\omega t})$. Από το Θεώρημα 2 έχουμε

$\frac{di}{dt} = \text{Re}(j\omega I e^{j\omega t})$. Άρα $\text{Re}(Ve^{j\omega t}) = \text{Re}(j\omega L I e^{j\omega t})$ επομένως $V = j\omega L I$. Ορίζουμε ως μιγαδική επαγωγική αντίδραση την ποσότητα $Z_L = V / I = j\omega L$.



Σχήμα 1.26

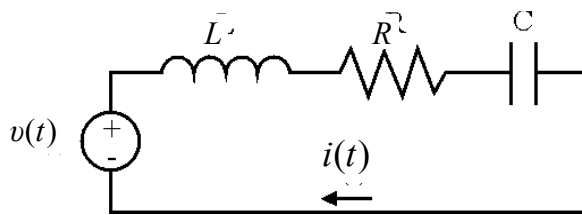
Το ρεύμα ακολουθεί την τάση με καθυστέρηση 90° .

δ) Αμοιβαία επαγωγή

Ισχύουν $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$ και $v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$. Θέτουμε, $v_1 = \text{Re}(V_1 e^{j\omega t})$, $v_2 = \text{Re}(V_2 e^{j\omega t})$, $i_1 = \text{Re}(I_1 e^{j\omega t})$ και $i_2 = \text{Re}(I_2 e^{j\omega t})$. Με ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως βρίσκουμε: $V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2$ και $V_2 = \pm j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$.

Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι ισχύει για τη σύνθεση μιγαδικών αντιστάσεων ότι ισχύει και για τις συνήθεις πραγματικές αντιστάσεις. (Για σύνθεση σε σειρά, παράλληλα κ.τ.λ.)

Παράδειγμα



Σχήμα 1.27

Να βρεθεί το ρεύμα στο κύκλωμα του Σχ. 1.27, αν $v(t) = \hat{v} \cos(\omega t + \phi)$.

Λύση

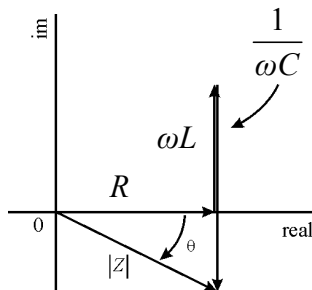
Ο φάσορας της τάσης είναι $V = \hat{v} e^{j\phi}$ ($v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$). Η ολική μιγαδική εμπέδηση είναι $Z = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}$ ($Z_L = j\omega L$, $Z_R = R$, $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$).

Άρα

$$Z = R + (j\omega L - \frac{1}{j\omega C}) = |Z| e^{j\theta} \text{ όπου } |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \text{ και}$$

$$\theta = \arctan \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right]. \text{ Ο φάσορας του ρεύματος είναι } I = \frac{V}{Z} = \frac{\hat{v}}{|Z|} e^{j(\phi_1 - \theta)}$$

$$\phi_1 - \theta = \phi_2$$



Σχήμα 1.28

Οι γωνίες είναι θετικές όταν μετρίονται κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητικές αν μετρίονται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από τη σχέση $F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L[f(t)]$

όπου s μιγαδικός ($s = \sigma + j\omega$) και λέγεται μιγαδική συχνότητα.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από τη σχέση:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st} ds = L^{-1}[F(s)].$$

Η συνάρτηση $f(t)$ θεωρείται για $t > 0$. Όλη η προϊστορία (για $t < 0$) εισάγεται στην αρχική τιμή για $t = 0_-$. Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός πρέπει το s να πληροί κάποιες προϋποθέσεις για να υπολογίζεται το ολοκλήρωμα. Όμως με τη μέθοδο της αναλυτικής επέκτασης ο μετασχηματισμός επεκτείνεται παντού όπου η συνάρτηση που ορίζει είναι αναλυτική. Αυτή είναι η αιτία που δεν δίνεται στους τύπους η περιοχή του s . Το $t = 0_-$ προτιμάται αντί του $t = 0$ από πολλούς ώστε να μην χρειάζεται να κάνει κάποιος κάτι ιδιαίτερο για τις ανώμαλες στο μηδέν συναρτήσεις $\delta(t)$ και $\theta(t)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L[\alpha f(t)] = \alpha L[f(t)] = \alpha F(s)$$

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$$

$$L[f(t - \alpha)\theta(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$$

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0_-) \dots - s \frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0_-) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0_-)$$

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-\alpha s}} \int_0^{\alpha} e^{-st} f(t) dt \quad \text{όπου } f(t) = f(t + \alpha), \quad \alpha > 0 \text{ (περιοδικές συναρτήσεις).}$$

Με το μετασχηματισμό Laplace διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε αλγεβρικές, οπότε διευκολύνεται η λύση προβλημάτων.

Μετασχηματισμός Laplace κάποιων συναρτήσεων

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\theta(t)$	1/s
t^n με $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} \cos(\beta t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$t \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$
$t \cos(\beta t)$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$
$\sin(\beta t + \varphi)$	$\frac{s \sin(\varphi) + \beta \cos(\varphi)}{s^2 + \beta^2}$
$\cos(\beta t + \varphi)$	$\frac{s \cos(\varphi) - \beta \sin(\varphi)}{s^2 + \beta^2}$
$e^{-at} [\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t)]$	$\frac{2\beta^3}{[(s+a)^2 + \beta^2]^2}$
$te^{-at} \sin(\beta t)$	$2\beta \frac{s+a}{[(s+a)^2 + \beta^2]^2}$
$te^{-at} \cos(\beta t)$	$\frac{(s+a)^2 - \beta^2}{[(s+a)^2 + \beta^2]^2}$

Έστω ότι για κάποιο κύκλωμα έχουμε τη διαφορική εξίσωση (η οποία είναι τυπική για περιπτώσεις κυκλωμάτων).

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Από τη σχέση:

$$L\left[\frac{d^l}{dt^l} f(t)\right] = s^l F(s) - s^{l-1} f(0_-) \dots - s \frac{d^{l-2} f}{dt^{l-2}}(0_-) - \frac{d^{l-1} f}{dt^{l-1}}(0_-)$$
 και αν δεν υπάρχει

αρχική ενέργεια στα στοιχεία του κυκλώματος τότε οι όροι με τις αρχικές συνθήκες

$$\text{είναι μηδέν, οπότε } L\left[\frac{d^l}{dt^l} f(t)\right] = s^l F(s).$$

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace για τη διαφορική εξίσωση δίνει:

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) X(s) \text{ ή } Y(s) = H(s) X(s).$$

Η $H(s) = \frac{(b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)}$ είναι η συνάρτηση του κυκλώματος. $X(s)$ είναι η

διέγερση και $Y(s)$ είναι η απόκριση.

Αν ξέρουμε τη διέγερση (ως συνάρτηση του χρόνου) $x(t)$ και την $H(s)$ τότε βρίσκουμε την $X(s)$ και την $Y(s)$. Στη συνέχεια με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της $Y(s)$ υπολογίζουμε την απόκριση $y(t)$.

- Σημασία της απόκρισης σε κρουστική διέγερση, $\delta(t)$, και σε βηματική διέγερση, $\theta(t)$

Έχουμε $Y(s) = H(s) X(s)$, (αν δεν υπάρχει αρχική ενέργεια στο κύκλωμα).

α) Αν $x(t) = \delta(t)$ η $X(s) = 1 \rightarrow h(t) = L^{-1}[H(s) X(s)] = L^{-1}[H(s)]$.

β) Αν $x(t) = \theta(t)$ η $X(s) = 1/s$ άρα $r(t) = L^{-1}[H(s) X(s)] = L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$

- Συνέλιξη (συγκερασμός) συναρτήσεων.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμη η έννοια της συνέλιξης (ή συγκερασμού) συναρτήσεων. Ο ορισμός της συνέλιξης για δυο συναρτήσεις είναι,

$$y(t) = h * f = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Παρόλο που χρησιμοποιήσαμε για τη μεταβλητή το σύμβολο t , επειδή στην περίπτωσή μας η μεταβλητή είναι πράγματι ο χρόνος, όμως η διαδικασία της συνέλιξης αναφέρεται γενικώς σε συναρτήσεις κάποιας οποιασδήποτε μεταβλητής. Εύκολα προκύπτουν οι ιδιότητες,

$$h * f = f * h \quad (\text{μεταθετική})$$

$$h * (f * g) = (h * f) * g \quad (\text{προσεταιριστική})$$

$$h * (f + g) = h * f + h * g \quad (\text{επιμεριστική})$$

- Συνέλιξη και μετασχηματισμός laplace.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις συναρτήσεις του χρόνου $h(t), f(t)$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι $f(t) = 0, h(t) = 0$ για $t < 0$.

Εύκολα δείχνεται ότι ισχύει,

$$L[h(t) * f(t)] = H(s)F(s) \quad \text{όπου } H(s) = L[h(t)], F(s) = L[f(t)]$$

Έστω $h(t), (H(s))$ η απόκριση κάποιου συστήματος σε κρουστική διέγερση $\delta(t)$. Προφανώς αν το σύστημα δεν έχει αρχική ενέργεια τότε για διέγερση $x(t), (X(s))$ η απόκριση του συστήματος είναι $y(t), (Y(s))$ και ισχύουν

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Ο μετασχηματισμός laplace μετατρέπει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης στο χώρο του χρόνου, σε σύνηθες γινόμενο στο χώρο των μιγαδικών συχνοτήτων.

Ανάλογα ισχύουν για το μετασχηματισμό fourier ο οποίος για δυο συναρτήσεις του t ορίζεται ως εξής,

$$G(\omega) = F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{ευθύς μετασχηματισμός fourier})$$

Ισχύει επίσης

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Έστω $G_x(\omega), G_y(\omega)$ οι μετασχηματισμοί fourier της εισόδου $x(t)$ και της εξόδου $y(t)$ αντιστοίχως. Έστω $H(j\omega)$ η συνάρτηση του συστήματος στο φανταστικό πεδίο συχνοτήτων. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)H(j\omega)$$

ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

α) Αντίσταση (ωμική)

Έχουμε τη σχέση $v(t) = R i(t)$.

Άρα ο μετασχηματισμός laplace δίνει $V(s) = R I(s)$ ή $Z_R(s) = R = \frac{V(s)}{I(s)}$.

$Z_R(s)$ είναι η μιγαδική ωμική αντίδραση (αντίσταση) που συμπίπτει με τη συνήθη πραγματική αντίσταση R .

Η $Y_R(s) = \frac{1}{R} = \frac{1}{Z_R(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}$ είναι η (μιγαδική) αγωγιμότητα.

β) Χωρητική (μυγαδική αντίδραση ή απλώς αντίσταση)

$$i = C \frac{dv}{dt}. \text{ Άρα } I(s) = \int_{0_-}^{\infty} i(t)e^{-st} dt = C \int_{0_-}^{\infty} \frac{dv}{dt} e^{-st} dt \text{ ή } I(s) = C sV(s) - Cv(0_-).$$

Αν υποθέσουμε ότι $v(0_-) = 0$, δηλαδή ότι δεν υπάρχει αρχική ενέργεια στον πυκνωτή, τότε έχουμε: $I(s) = C sV(s)$ ή $Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$. Αυτή είναι η μυγαδική χωρητική

αντίδραση (αντίσταση). $Y_C(s) = \frac{1}{Z_C(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} = sC$. Y_C είναι η μυγαδική χωρητική αγωγιμότητα.

γ) Αυτεπαγωγή

$v = L \frac{di}{dt}$. $V(s) = sL I(s) - Li(0_-)$. Αν δεν υπάρχει αρχική ενέργεια στο πηνίο, $i(0_-) = 0$.

Άρα $Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL$. Αυτή είναι η μυγαδική επαγωγική αντίδραση και

$Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)} = \frac{1}{sL}$ είναι η μυγαδική επαγωγική αγωγιμότητα.

δ) Αμοιβαία επαγωγή

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \text{ και } v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

άρα $V_1(s) = sL_1 I_1(s) \pm sM I_2(s) - L_1 i_1(0_-) \mp M i_2(0_-)$ και

$$V_2(s) = \pm sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) \mp M i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-)$$

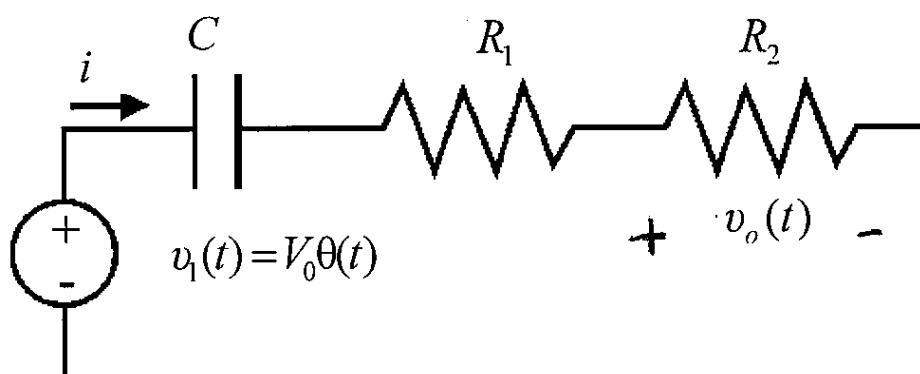
Αν δεν υπάρχει αρχική ενέργεια $i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0$ άρα

$$V_1(s) = sL_1 I_1(s) \pm sM I_2(s) \text{ και } V_2(s) = \pm sM I_1(s) + sL_2 I_2(s).$$

Ισχύουν οι συνήθεις κανόνες για τη σύνθεση των μυγαδικών αντιδράσεων (αντιστάσεων) που ισχύουν για τις συνήθεις πραγματικές αντιδράσεις (αντιστάσεις). Σύνθεση σε σειρά, παράλληλα κλπ.

Παράδειγμα

Βρείτε την έξοδο, $v_o(t)$ για είσοδο $v_1(t) = V_0 \theta(t)$, $t > 0$ όπου $\theta(t)$ η συνάρτηση heavyside. Δεν υπάρχει αρχική ενέργεια στο κύκλωμα.



Σχήμα 1.29

Λύση

Η ολική μιγαδική (σύνθετη) αντίδραση (εμπέδηση) είναι,

$$Z = \frac{1}{sC} + R_1 + R_2 \quad \text{άρα} \quad I(s) = \frac{V_1(s)}{Z} = \frac{V_1(s)}{\frac{1}{sC} + (R_1 + R_2)}. \quad V_1(s) = V_0 L[\theta(t)] = V_0 \frac{1}{s} \quad \text{άρα}$$

$$I(s) = \frac{V_0 C}{1 + (R_1 + R_2) C s} = \frac{\frac{V_0}{R_1 + R_2}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}} \Rightarrow V_o(s) = I(s) R_2 = \frac{\frac{V_0}{R_1 + R_2} \cdot R_2}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}}.$$

Από πίνακες βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της e^{-at} είναι $\frac{1}{s + \alpha}$ άρα

$$v_o(t) = \frac{V_0}{R_1 + R_2} R_2 \cdot e^{-t/(R_1 + R_2) \cdot C}$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΣΕ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Με τη χρήση πινάκων που δίνουν τους μετασχηματισμούς Laplace διαφόρων συναρτήσεων και με τη χρήση της μεθόδου αναπτυγμάτων σε επιμέρους κλάσματα μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα εύρεσης του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace σε απλούστερο πρόβλημα.

Έστω ότι η $F(s)$ είναι ρητή συνάρτηση της μορφής,

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad \text{έστω ότι } m < n. \text{ Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε}$$

διαιρούμε τον αριθμητή δια του παρονομαστή και καταλήγουμε σε κάποιο πολυώνυμο που αναστρέφεται εύκολα με μετασχηματισμό Laplace και ένα κλάσμα πολυωνύμων με $m < n$.

$$\text{Έχουμε } F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{(s - s_n)(s - s_{n-1}) \dots (s - s_{r+1}) \dots (s - s_1)^r} \quad \text{όπου } s_k, k = 1, \dots, n \text{ είναι οι ρίζες}$$

του πολυωνύμου του παρονομαστή που λέγονται πόλοι της $F(s)$ και η ρίζα s_1 έχει πολλαπλότητα r . Αν υπάρχει στον αριθμητή και στον παρονομαστή ο ίδιος παράγοντας προφανώς πρέπει να απαλειφθεί.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε,

$$F(s) = \frac{k_n}{s - s_n} + \dots + \frac{k_{r+1}}{s - s_{r+1}} + \frac{k_r}{(s - s_1)^r} + \frac{k_{r-1}}{(s - s_1)^{r-1}} + \dots + \frac{k_1}{s - s_1}. \text{ Τα } k_i \text{ είναι σταθερές που}$$

προσδιορίζονται.

Η σταθερά k_ρ για πολλαπλή ρίζα πολλαπλότητας r , βρίσκεται από τη σχέση,

$$k_{r-\rho} = \lim_{s \rightarrow s_1} \left(\frac{1}{\rho!} \frac{d^\rho}{ds^\rho} [(s - s_1)^r F(s)] \right) \quad \text{για } \rho = 0, \dots, (r-1).$$

Η μηδενική παράγωγος συνάρτησης ορίζεται ίση με τη συνάρτηση. Πρέπει πρώτα να απλοποιηθεί ο παράγοντας $(s - s_1)^\rho$ και μετά να γίνει η παραγωγήση.

Για την απλή ρίζα s_l έχουμε, $k_l = \lim_{s \rightarrow s_l} [(s - s_l) F(s)]$

Για πολλαπλή ρίζα σχετικά μικρής πολλαπλότητας, αφού βρεθούν οι συντελεστές των απλών ριζών, μπορεί να εφαρμοστεί απλή αλγεβρική μέθοδος όπου στο ανωτέρω ανάπτυγμα της $F(s)$, δίνονται τιμές στο s διαφορετικές από την πολλαπλή ρίζα και λύνεται το σύστημα που προκύπτει ως προς τους άγνωστους συντελεστές.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η $f(t)$ για $F(s) = \frac{4s^2 + 9s + 1}{2s(s + 2)}$. Διαιρούμε τον αριθμητή δια του

παρονομαστή και βρίσκουμε, $4s^2 + 9s + 1 = 2 \cdot [2s(s + 2)] + (s + 1)$ άρα

$$F(s) = \frac{4s^2 + 9s + 1}{2s(s + 2)} = 2 + \frac{s + 1}{2s(s + 2)} \quad \text{ή} \quad F(s) = 2 + \frac{\frac{1}{2}(s + 1)}{s(s + 2)} = 2 + \frac{k_2}{s + 2} + \frac{k_1}{s} = 2 + F_1(s)$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)F_1(s)] = \left. \frac{1}{2} \frac{s+1}{s} \right|_{s=-2} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{4} \text{ και}$$

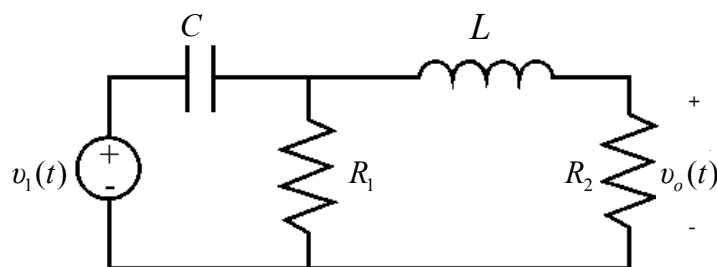
$$k_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{\frac{1}{2} \frac{s+1}{s(s+2)}}{s(s+2)} \right] = \left. \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+2} \right|_{s=0} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{4}. \text{ Άρα } F_1(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s} \text{ και τελικά}$$

$$F(s) = 2 + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s} \text{ από πίνακες βρίσκουμε, } f(t) = 2\delta(t) + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\theta(t), t > 0 \text{ ή}$$

$$f(t) = 2\delta(t) + \frac{1}{4}(1 + e^{-2t}), t > 0$$

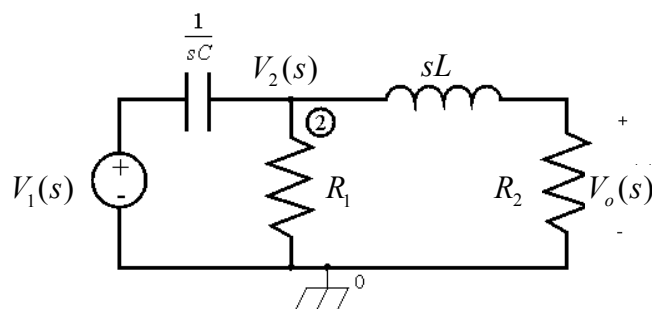
Παράδειγμα

Να βρεθεί η απόκριση σε κρουστική διέγερση του παρακάτω κυκλώματος.
 ($R_1 = R_2 = 1,0 \Omega$, $L = 1,0 \text{ H}$, $C = 1,0 \text{ F}$)



Σχήμα 1.30

Λύση



Σχήμα 1.31

$$\frac{V_2(s) - V_1(s)}{1/sC} + \frac{V_2(s)}{R_1} + \frac{V_2(s)}{sL + R_2} = 0 \text{ (κανόνας των κόμβων του Kirchhoff).}$$

$$V_2(s) = \frac{sC}{sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL + R_2}} V_1(s). \text{ Από το διαιρέτη τάσης προκύπτει,}$$

$$V_0(s) = \frac{R_2}{R_2 + sL} V_2(s) = \frac{sCR_2}{(sL + R_2)(sC + \frac{1}{R_1}) + 1} V_1(s) \text{ ή}$$

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = H(s) = \frac{sCR_2}{(sL + R_2)(sC + \frac{1}{R_1}) + 1}. \text{ Άρα από τα δεδομένα } H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \text{ ή}$$

$$H(s) = \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \text{ όπου } s_1 = -1 + j \text{ και } s_2 = -1 - j$$

Όταν τα μεγέθη εισόδου εξόδου αναφέρονται σε διαφορετικές θύρες τότε η συνάρτηση του κυκλώματος H λέγεται συνάρτηση μεταφοράς.

$$\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}. \quad k_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} [(s - s_1)F(s)] = \left. \frac{s}{s - s_2} \right|_{s=s_1} \text{ και}$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} [(s - s_2)F(s)] = \left. \frac{s}{s - s_1} \right|_{s=s_2}.$$

$$\text{Άρα, } k_1 = \frac{s_1}{s_1 - s_2} = \frac{-1 + j}{-1 + j - (-1 - j)} = \frac{-1 + j}{2j} = \frac{1}{2}(1 + j) \text{ και}$$

$$k_2 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} = \frac{-1 - j}{-1 - j - (-1 + j)} = \frac{-1 - j}{-2j} = \frac{1}{2}(1 - j).$$

$$\text{Άρα } H(s) = \frac{1}{2} \frac{1 + j}{s - s_1} + \frac{1}{2} \frac{1 - j}{s - s_2} \text{ και}$$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{1}{2}(1 + j)L^{-1}\left[\frac{1}{s - s_1}\right] + \frac{1}{2}(1 - j)L^{-1}\left[\frac{1}{s - s_2}\right] \Rightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{2}(1 + j)e^{s_1 t} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{s_2 t} = \frac{1}{2}(1 + j)e^{(-1+j)t} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{(-1-j)t} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + j)e^{-t}e^{jt} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{-t}e^{-jt} =$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}(\cos t + j \sin t + j \cos t - \sin t + \cos t - j \sin t - \cos t - \sin t) = \frac{e^{-t}}{2}(2 \cos t - 2 \sin t) \Rightarrow$$

$$h(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

ΣΤΑΘΜΕΣ (LEVELS)

Πολλές φορές για να δείξουμε πόσο διαφέρουν μεταξύ τους δυο όμοια φυσικά μεγέθη χρησιμοποιούμε το λογάριθμο του λόγου τους (στάθμη).

Την ενίσχυση ισχύος την ορίζουμε ως στάθμη με τον εξής τρόπο,

$G_B = \lg G = \log_{10} G$ το αποτέλεσμα είναι σε bel (B). Προφανώς η ενίσχυση ισχύος είναι ο λόγος της ισχύος εξόδου προς την ισχύ εισόδου,

$$G = P_o / P_i$$

Υπάρχει και στάθμη που βασίζεται στο φυσικό λογάριθμο, συγκεκριμένα,

$G_N = \ln G = \log_e G$ το αποτέλεσμα είναι σε neper (Np).

Δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες στάθμες.

Αντί για το bel χρησιμοποιείται το υποπολλαπλάσιό του, το decibel (dB), δηλαδή το 1/10 του bel. Η αρχική σχέση γίνεται,

$$G_{dB} = 10 \lg G \quad (\text{σε dB}).$$

Αν $G=1$ τότε $G_{dB}=0$ αν $G=100$ τότε $G_{dB}=20$ dB $G=2$ $G_{dB} \approx 3$ dB.

Το ολικό G ενισχυτών σε σειρά είναι προφανώς,

$$G = G_1 G_2 G_3 \dots$$

Προφανές είναι ότι ισχύει για τις αντίστοιχες στάθμες,

$$G = G_{1dB} + G_{2dB} + G_{3dB} + \dots$$

Αν έχουμε ενισχυτή με αντίσταση εισόδου R_i και αντίσταση φόρτου R_L τότε προφανώς η ενίσχυση ισχύος είναι

$$G = (v_o^2 / R_L) / (v_i^2 / R_i) \quad \text{ή} \quad G = (v_o/v_i)^2 (R_i/R_L)$$

Αφού η ενίσχυση τάσης είναι $A_v = v_o/v_i$ προκύπτει ότι $G = A_v^2 (R_i/R_L)$.

Αν $R_i/R_L = 1$ τότε $G = A_v^2$. Έχουμε,

$$G_{dB} = 10 \lg G = 10 \lg A_v^2 = 10 \times 2 \lg A_v$$

Αυτό οδηγεί στο να οριστεί η στάθμη για την ενίσχυση τάσης ως,

$$A_{v,dB} = 20 \lg A_v$$

Το ίδιο ισχύει προφανώς για ενίσχυση ρεύματος.

Αν $A_v = 10$ τότε $A_{v,dB} = 20$ dB αν $A_v = 2$ τότε $A_{v,dB} \approx 6$ dB αν $A_v = \sqrt{2} / 2 \approx 0,707$ τότε $A_{v,dB} \approx -3$ dB

Στάθμες αναφοράς

Αν πάρουμε ως στάθμη αναφοράς για τάσεις το 1 V τότε μπορούμε να πούμε ότι η τάση V μπορεί να θεωρηθεί ως στάθμη σε σχέση με το 1 V και να μετρηθεί ως εξής,

$20 \lg (V / 1 \text{ V})$ και μετριέται σε dBV

για παράδειγμα, για τα 5 V έχουμε

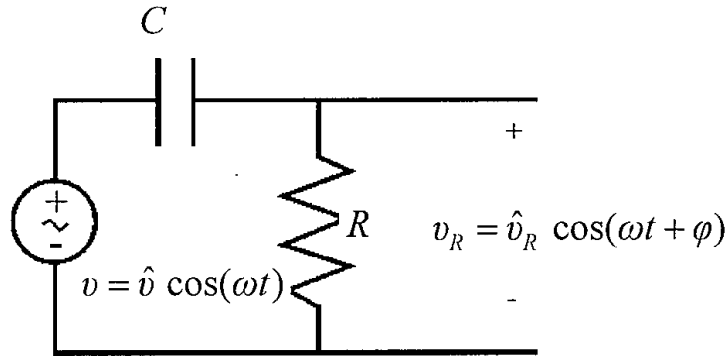
$20 \lg (5 \text{ V} / 1 \text{ V}) \approx 14$ dBV Αν η στάθμη αναφοράς ισχύος είναι το 1 mW τότε η ισχύς των 5 mW οδηγεί σε

$$10 \lg (5 \text{ mW} / 1 \text{ mW}) \approx 6,99 \text{ dBmW}$$

Για στάθμη αναφοράς ισχύος 1 W η ισχύς των 5 mW οδηγεί στο

$$10 \lg (5 \cdot 10^{-3} \text{ W} / 1 \text{ W}) \approx -23 \text{ dBW}$$

ΥΨΙΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ CR



Σχήμα 1.32

Έχομε τους φάσορες $V = \hat{v}$, $V_R = \hat{v}_R e^{j\varphi}$, $V_R = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C} + R}$,

Για τη συνάρτηση μεταφοράς (ή απολαβή, ή ενίσχυση, ή κέρδος) $T = T(j\omega)$ ισχύει,

$$T = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega CR}} \text{ και}$$

$$|T| = \frac{\hat{v}_R}{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}$$

$$T = \frac{V_R}{V} = \frac{1 + \frac{j}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}} \text{ επομένως } V_R = \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}} e^{j\varphi},$$

$$\text{όπου } \tan \varphi = \frac{1}{\omega CR} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{1}{\omega CR}.$$

Αν $\varphi = 45^\circ$ τότε $\tan \varphi = 1$.

$1 = \frac{1}{\omega_b CR} \Rightarrow \omega_b = \frac{1}{CR}$ η ω_b λέγεται κυκλική κρίσιμη συχνότητα ή κυκλική συχνότητα καμπής ή κυκλική συχνότητα γόνατος.

$$\text{Προφανώς } T = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_b}{\omega}} \text{ και } |T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2}}$$

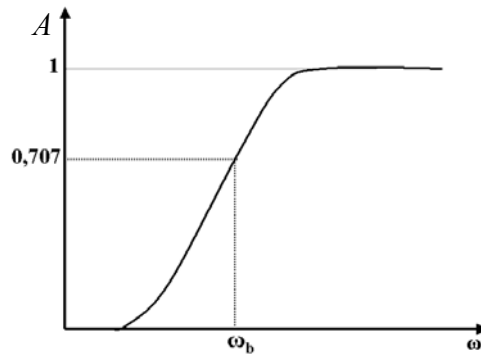
$$\text{Έχομε } |T|_{\omega=\omega_b} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega_b}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707. \text{ Όμως } A_{\text{dB}} = 20 \lg |T| \text{ άρα}$$

$$A_{\text{dB}}(\omega_b) \approx -3 \text{ dB.}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι,

$$|T| = \frac{\hat{v}_R}{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}} \quad \text{και επομένως}$$

$$T_{dB} = 20 \lg \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_b}}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$



Σχήμα 1.33

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_b}{\omega} \quad \text{ή} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega_b}{\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_b} \quad \text{Ισχύει}$$

$$\lim_{\omega \ll \omega_b} A_{dB} \approx 20 \lg \frac{\omega}{\omega_b} = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_b$$

$$\text{επομένως η κλίση } \frac{dA_{dB}}{d \lg \omega} (= \frac{\Delta A_{dB}}{\Delta \lg \omega}) = 20 \frac{\text{dB}}{\text{δεκαπλασιασμο συχνοτητας}}$$

προφανώς το τελευταίο ισχύει διότι $\Delta \lg \omega = 1$ σημαίνει δεκαπλασιασμός συχνότητας. Εύκολα προκύπτει ότι η κλίση είναι (περίπου)

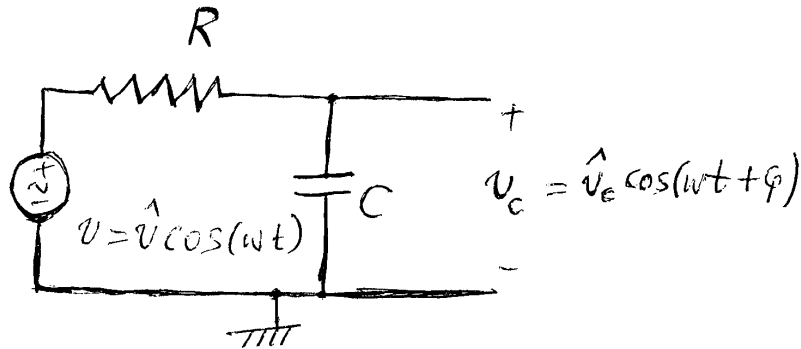
$$-6 \frac{\text{dB}}{\text{οκταβα (διπλασιασμο συχνοτητας)}}$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 - j \frac{\omega_b}{\omega}} \quad \text{όπου } K \text{ πραγματική σταθερά (ίση με την απολαβή για } \omega=0),$$

τότε μελετούμε τη συνάρτηση $T' = \frac{T}{K}$.

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ RC



Σχήμα 1.34

Για τους φάσορες έχουμε

$$V = \hat{v}, V_C = \hat{v}_c e^{j\varphi}, V_C = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C} + R} \frac{1}{j\omega C}$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς $T = T(j\omega)$ έχουμε

$$T = \frac{V_C}{V} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \quad \text{άρα} \quad |T| = \frac{\hat{v}_c}{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad \text{άρα}$$

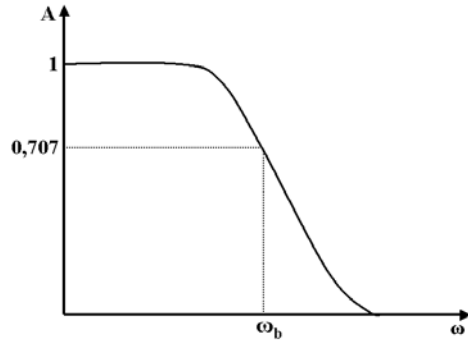
$$\hat{v}_c = \hat{v} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j\varphi}.$$

Ισχύει $\tan \varphi = -\omega CR$, άρα $\varphi = \arctan(-\omega CR)$, οπότε όταν $\varphi = -45^\circ$ ισχύει $\omega_b CR = 1$,

επομένως $\omega_b = \frac{1}{CR}$ (κρίσιμη κυκλική συχνότητα ή κυκλική συχνότητα καμπής ή γόνατος).

Προφανώς,

$$T = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_b}}, \quad |T| = \frac{\hat{v}_c}{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}} \quad \text{και} \quad \tan \varphi = -\frac{\omega}{\omega_b} \quad \text{οπότε} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_b}\right)$$



Σχήμα 1.35

$$A_{\text{dB}} = 20 \lg \left(\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right). \text{ Όταν } \omega = \omega_b \text{ τότε } |T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707. \text{ Προφανώς}$$

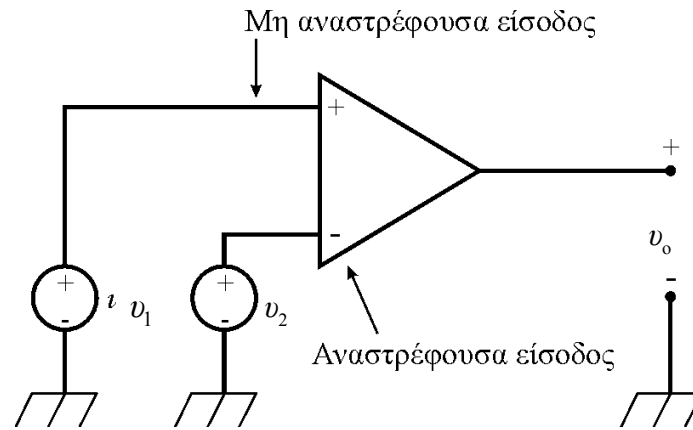
αυτό σημαίνει μεταβολή κατά -3dB , δηλαδή μείωση.

Αν $\omega \gg \omega_b$, τότε $A_{\text{dB}} \approx 20 \lg \frac{\omega_b}{\omega}$. Έχουμε ανάλογα με τα προηγούμενα, κλίση -20 dB/δεκάδα ή (περίπου) -6 dB/οκτάβα .

Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι $T = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_b}}$ όπου K

πραγματική σταθερά, τότε εξετάζουμε τη συνάρτηση $T' = \frac{T}{K}$.

2. ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΙ ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ (OPERATIONAL AMPLIFIERS)



Σχήμα 2.1

$$v_o = A_d v_{id} + A_{cm} v_{icm}$$

$$v_{id} = v_1 - v_2, v_{icm} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

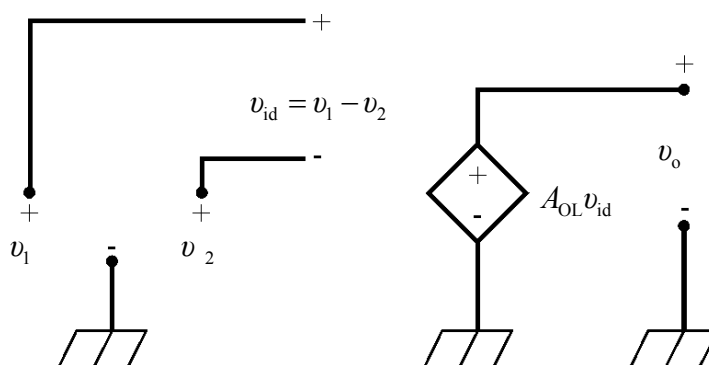
d = (differential) διαφορικού τύπου.

cm = (common mode) κοινού τύπου.

Ο ιδανικός τελεστικός ενισχυτής έχει:

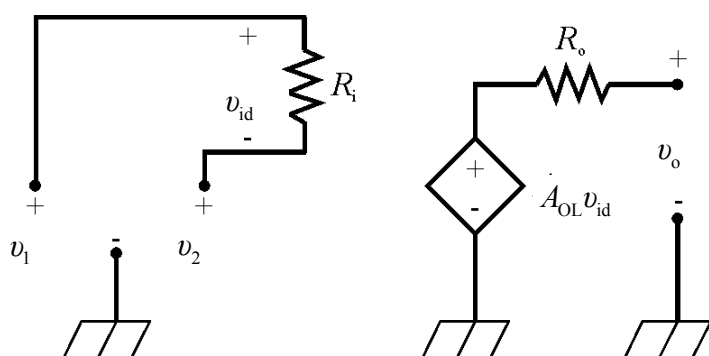
- Άπειρη αντίσταση εισόδου, R_i .
- Άπειρη ενίσχυση (απολαβή, κέρδος) (ανοιχτού βρόχου), A_{OL} ή A_0 , για διαφορικό σήμα εισόδου.
- Ενίσχυση μηδέν για σήμα κοινού τύπου, cm.
- Μηδέν αντίσταση εξόδου, R_o .
- Άπειρο εύρος ζώνης συχνοτήτων.

Ισοδύναμο κύκλωμα για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή



Σχήμα 2.2

Ισοδύναμο κύκλωμα για μη ιδανικό τελεστικό ενισχυτή



Σχήμα 2.3

ΚΑΝΟΝΕΣ ΓΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΥ ΕΝΙΣΧΥΤΗ (ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΩΣ ΕΝΙΣΧΥΤΗ)

- Για να ισχύει το ότι οι δύο εισόδους είναι στην ίδια τάση (εικονικό βραχυκύκλωμα), πρέπει ο τελεστικός ενισχυτής να ΜΗΝ βρίσκεται σε κόρο. Όταν βρίσκεται σε κόρο η έξοδος του φτάνει περίπου στην τάση τροφοδοσίας του, θετική ή αρνητική. Στην κανονική λειτουργία ο τελεστικός ενισχυτής κάνει ό,τι χρειάζεται να γίνει, ώστε η διαφορά δυναμικού στην είσοδό του να είναι πρακτικώς μηδέν. Τότε και τα ρεύματα εισόδου είναι πρακτικώς μηδέν. Στον κόρο δεν ισχύουν αυτά.
- Για «καλή» λειτουργία η ανασύζευξη πρέπει να είναι αρνητική.
- Πρέπει να υπάρχει ανασύζευξη στο dc, με κάποια αντίσταση μεγάλης τιμής, για να αποφεύγεται η μετάβαση στον κόρο.
- Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των εισόδων πρέπει να μην υπερβαίνει κάποια τιμή, διαφορετικά ο ενισχυτής θα καταστραφεί διότι θα δημιουργηθούν μεγάλα ρεύματα στην είσοδό του.

Ο όρος τελεστικός ενισχυτής προέρχεται από το γεγονός ότι στην αρχή χρησιμοποιήθηκε για πράξεις σε αναλογικά κυκλώματα. Σήμερα η χρήση του είναι πολύ πιο εκτεταμένη.

A. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΥΣ (Κανονική λειτουργία).

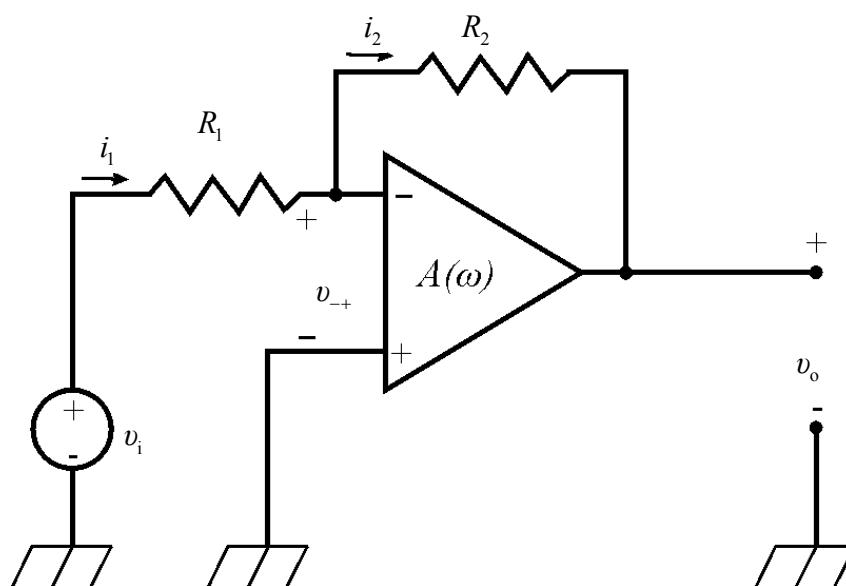
Έστω ότι η ενίσχυση χωρίς αναστροφή ανοιχτού βρόχου, δηλαδή χωρίς ανασύζευξη (feedback), του τελεστικού ενισχυτή είναι:

$$A = A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_b}} \quad \text{όπου τα } A_0 (>0), \omega, \omega_b \text{ είναι πραγματικά.}$$

Προφανώς ω_b είναι η κυκλική συχνότητα 3 dB ή συχνότητα καμπής ή συχνότητα μισής ισχύος. A_0 είναι η ενίσχυση για $\omega = 0$ και για σχετικά χαμηλές συχνότητες. Η εξάρτηση αυτή από τη συχνότητα για την ενίσχυση ανοιχτού βρόχου, είναι τύπου βαθυπερατού φίλτρου και αντιστοιχεί στο μοντέλο μοναδικού πόλου (single pole) ή κυρίαρχου πόλου (dominant pole). Συγκεκριμένα, οι λεγόμενοι εσωτερικά αντισταθμισμένοι (internally compensated) τελεστικοί ενισχυτές, περιλαμβάνουν κυκλώματα τα οποία οδηγούν σε αυτή τη συμπεριφορά (μια μόνο σταθερά χρόνου). Αυτό λέγεται αντιστάθμιση συχνότητας και έχει ως στόχο να εξασφαλιστεί ότι τα κυκλώματα που χρησιμοποιούν τον τελεστικό ενισχυτή είναι ευσταθή, δηλαδή χωρίς ταλαντώσεις ένεκα ανασύζευξης σε υψηλές συχνότητες. Στην παραγωγή ταλαντώσεων συμβάλλει το γεγονός ότι το A_0 είναι πολύ μεγάλο, της τάξης 100 000 και περισσότερο.

Αναστρέφων τελεστικός ενισχυτής με ανασύζευξη.

Έστω ο αναστρέφων τελεστικός ενισχυτής με ανασύζευξη του Σχήματος 2.4,



Σχήμα 2.4

α) Ιδανική περίπτωση, A άπειρο.

Αν ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός τότε $A = \infty$ και $v_{-+} = -\frac{v_o}{A} = 0$ (αφού το v_o είναι πεπερασμένο). Αυτό λέγεται συνθήκη εικονικού βραχυκυκλώματος ή εικονικής γείωσης. Επίσης το ρεύμα μέσα στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή, είναι μηδέν αφού η αντίσταση εισόδου του είναι άπειρη.

Έχουμε επομένως $i_1 = i_2$, $i_1 = \frac{v_i}{R_1}$, $i_2 = -\frac{v_o}{R_2}$ άρα $\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2}$ επομένως η ενίσχυση A_f , με ανασύζευξη (ενίσχυση κλειστού βρόχου), είναι:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} = -A'_0, \quad A'_0 > 0$$

β) Μη ιδανική περίπτωση, A πεπερασμένο.

Αν το A δεν είναι άπειρο τότε: $i_1 = \frac{v_i - v_{-+}}{R_1} = \frac{v_i - (-\frac{v_o}{A})}{R_1} = \frac{v_i + \frac{v_o}{A}}{R_1}$ και

$v_o = v_{-+} - i_1 R_2 = -\frac{v_o}{A} - i_1 R_2$ άρα $v_o = -\frac{v_o}{A} - \frac{v_i + \frac{v_o}{A}}{R_1} R_2$ τελικώς

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2/R_1}{1 + (1 + \frac{R_2}{R_1})/A}$$

Όμως $A = A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_b}}$ άρα

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{(1 + R_2/R_1)}{A_0} (1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} \quad \text{ή}$$

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + (1 + \frac{R_2}{R_1})/A_0 + (1 + \frac{R_2}{R_1})(\frac{j\omega}{\omega_b A_0})}$$

Στην πράξη ισχύει $A_0 \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}$, επομένως

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_b A_0 / (1 + \frac{R_2}{R_1})}} = -\frac{A'_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_b A_0 / (1 + \frac{R_2}{R_1})}} \quad \text{προφανώς το } A'_0 = \frac{R_2}{R_1}$$

ισούται με το αρνητικό της ενίσχυσης κλειστού βρόχου για $\omega=0$.

Αν το A_0 τείνει στο άπειρο καταλήγουμε στην προηγούμενη ιδανική περίπτωση.

Έστω $A_0\omega_b = \omega_t$, το ω_t λέγεται γινόμενο ενίσχυσης-εύρους ζώνης (συχνοτήτων) (gain-bandwidth product) και είναι κατασκευαστικό στοιχείο του τελεστικού ενισχυτή. Μπορούμε να γράψουμε $A_f(\omega) = -\frac{A'_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_t / (1 + \frac{R_2}{R_1})}}$

$$A_f(\omega) = -\frac{A'_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_t / (1 + \frac{R_2}{R_1})}}$$

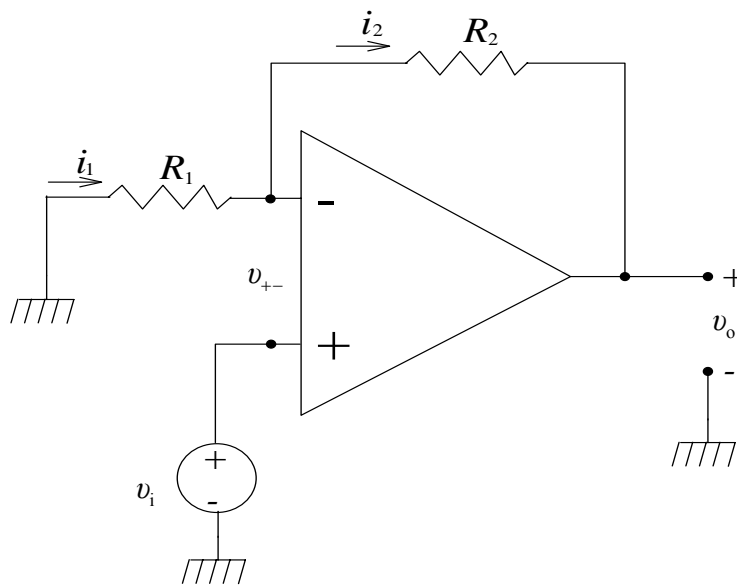
Αν θέσουμε $\omega'_b = \frac{\omega_t}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$ βρίσκουμε τη σχέση $A_f(\omega) = -\frac{A'_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_b}}$

Αυτή η μορφή είναι ίδια με αυτήν του ανοιχτού βρόχου (βαθυπερατό φίλτρο) αλλά με συχνότητα καμπής την ω'_b .

Προφανώς ισχύει

$$\omega_t = \omega'_b(1 + A'_0)$$

Μη αναστρέφων τελεστικός ενισχυτής με ανασύζευξη.
Έχουμε το κύκλωμα του Σχήματος 2.5.



Σχήμα 2.5

α) Ιδανική περίπτωση, A άπειρο.

Η ενίσχυση ανοιχτού βρόχου είναι άπειρη, η εσωτερική αντίσταση είναι επίσης άπειρη και έχουμε εικονικό βραχυκύκλωμα στην είσοδο. Έχουμε επομένως, ανάλογα

$$\text{με τα προηγούμενα, } v_{+-} = \frac{v_o}{A} = 0, \quad i_1 = i_2, \quad i_1 = -\frac{v_i}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_i - v_o}{R_2} \quad \text{άρα} \quad -\frac{v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_2}$$

Επομένως η σχέση για την ενίσχυση κλειστού βρόχου είναι

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A'_0$$

β) Μη ιδανική περίπτωση, A πεπερασμένο.

Εφόσον το A είναι πεπερασμένο έχουμε

$$i_1 = -\frac{v_i - v_{+-}}{R_1}, \quad i_2 = -\frac{v_o - (v_i - v_{+-})}{R_2} \quad \text{άρα αφού } i_1 = i_2 \text{ θα έχουμε}$$

$$\frac{v_i - v_{+-}}{R_1} = \frac{v_o - (v_i - v_{+-})}{R_2} \quad \text{επομένως} \quad \frac{v_i - \frac{v_o}{A}}{R_1} = \frac{v_o - (v_i - \frac{v_o}{A})}{R_2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει για την ενίσχυση η σχέση

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + (1 + \frac{R_2}{R_1})/A} = \frac{A'_0}{1 + (1 + \frac{R_2}{R_1})/A}$$

Παρατηρούμε ότι αν το A είναι άπειρο τότε καταλήγουμε στη σχέση για την ιδανική περίπτωση.

Όπως πριν, αντικαθιστούμε το A με το $A(\omega)$ και λαβαίνουμε υπόψη ότι $A_0 \gg 1 + R_2/R_1$ οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$A_f = \frac{A'_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_i / (1 + R_2 / R_1)}} = \frac{A'_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_b}} \quad (\text{βαθυπερατό φίλτρο}).$$

Προφανώς το A'_0 ισούται με την ενίσχυση κλειστού βρόχου για $\omega = 0$.

Παρατηρούμε ότι $\omega'_b = \omega_i / (1 + R_2 / R_1)$ όπως και στον αναστρέφοντα ενισχυτή.

Ειδικά για τον μη αναστρέφοντα ενισχυτή έχουμε $\omega'_b = \omega_i / (1 + R_2 / R_1) = \frac{\omega_i}{A'_0}$.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του μη αναστρέφοντα ενισχυτή έχουμε

$$\omega_i = A_0 \omega_b = A'_0 \omega'_b = \text{σταθερό ανεξάρτητο από την ανασύζευξη}.$$

Τέτοια σχέση ισχύει και για τον αναστρέφοντα ενισχυτή μόνον αν

$$A'_0 = R_2 / R_1 \gg 1.$$

Για τον αναστρέφοντα, όπως προαναφέραμε, ισχύει γενικώς $\omega'_b (1 + A'_0) = \omega_i = \omega_b A_0$.

Για τον μη αναστρέφοντα και τον αναστρέφοντα ενισχυτή, όταν $\omega \gg \omega'_b$ ισχύει

$$A_f \approx -\frac{A'_0 \omega'_b}{j\omega} \quad \text{οπότε προφανώς για τον μη αντιστρέφοντα, όταν } |A_f| = 1, \text{ έχουμε ότι}$$

$\omega = \omega_i$. Για τον αναστρέφοντα αυτό ισχύει μόνον κατά προσέγγιση όταν

$A'_0 = R_2 / R_1 \gg 1$. Γιαυτό η ω_i λέγεται εύρος ζώνης συχνοτήτων μοναδιαίας ενίσχυσης, (unity-gain bandwidth). Υποτίθεται ότι ο ενισχυτής ενισχύει συχνότητες που φτάνουν πολύ κοντά στο μηδέν και αυτός είναι ο λόγος που το εύρος συμπίπτει με την ω_i , δηλαδή δεν υπάρχει, πρακτικώς, κατώτερο όριο συχνοτήτων.

Προφανώς για $\omega \gg \omega'_b$ έχουμε $|A_f| \approx \frac{A'_0 \omega'_b}{\omega}$ άρα

$$A_{f\text{dB}} = 20 \lg |A_f| \approx -20 \lg f + 20 \lg(A'_0 \omega'_b / 2\pi) \quad (\omega_b = 2\pi f_b).$$

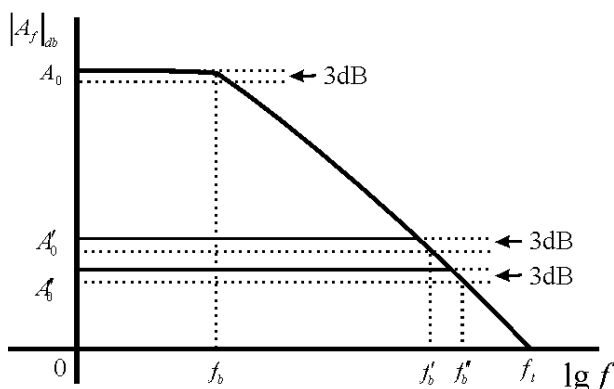
Έχουμε επομένως,

$$\text{κλίση} = \frac{dA_{f\text{dB}}}{d \lg f} (= \frac{\Delta A_{f\text{dB}}}{\Delta \lg f}) = -20 \frac{\text{dB}}{\text{δεκαπλασιασμο συχνοτητας}} \quad \text{προφανώς το}$$

τελευταίο ισχύει διότι το $\Delta \lg f = 1$ αντιστοιχεί σε 10-πλασιασμό συχνότητας. Η

κλίση είναι ίδια στην περίπτωση του αναστρέφοντα και του μη αναστρέφοντα ενισχυτή. Στην περίπτωση όμως του μη αναστρέφοντα (όπως και στην περίπτωση του αναστρέφοντα με μεγάλη ενίσχυση), ο όρος $20 \lg(A'_0 \omega'_b / 2\pi)$ γίνεται

$20 \lg(\omega_i / 2\pi)$, δηλαδή είναι σταθερός ανεξάρτητος της ενίσχυσης. Επομένως η σχέση ενίσχυσης σε dB ως προς το λογάριθμο της συχνότητας είναι ίδια για μεγάλες συχνότητες ανεξάρτητα από την ενίσχυση του μη αναστρέφοντα ενισχυτή. Για αυτή την περίπτωση έχουμε το Σχήμα 2.6, με λογαριθμικές κλίμακες.



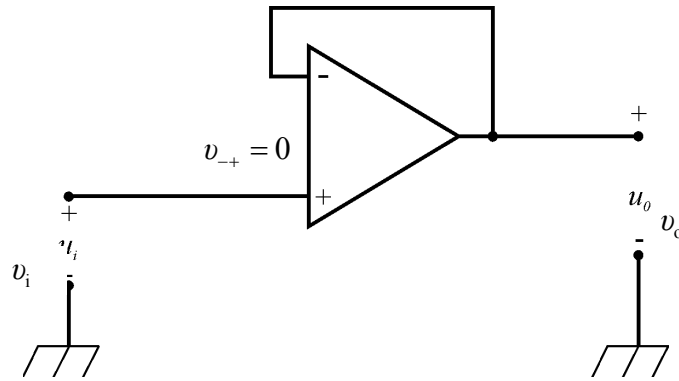
Σχήμα 2.6

(Καλύτερα να αναφερόμαστε σε λογαριθμικές κλίμακες αξόνων αντί να παίρνουμε λογαρίθμους μεγεθών με διαστάσεις συχνότητας!!)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η κλίση είναι (περίπου)

$$-6 \frac{\text{dB}}{\text{οκταβα (διπλασιασμο συχνοτητας)}}.$$

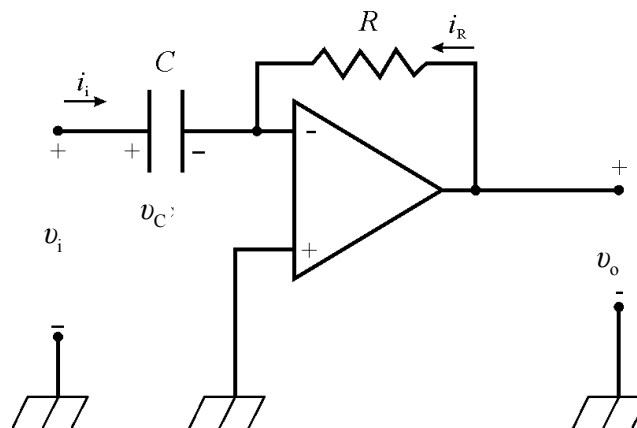
Ακολουθητής (ακόλουθος) τάσης.



Σχήμα 2.7

Αφού $v_{-+} = 0$, έχουμε $v_i = v_o$, δηλαδή η έξοδος ακολουθεί την είσοδο, από όπου προκύπτει και το όνομα του κυκλώματος. Προφανώς η αντίσταση εισόδου είναι πρακτικώς άπειρη (πολύ μεγάλη), ενώ η αντίσταση εξόδου είναι πολύ μικρή.

Διαφοριστής



Σχήμα 2.8

Στον κόμβο εισόδου (-) έχουμε $i_i = -i_R$. Επίσης $C = \frac{dq_C}{dv_C}$ ή $dq_C = Cdv_C$ ή

$$i_i = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{dv_C}{dt}.$$

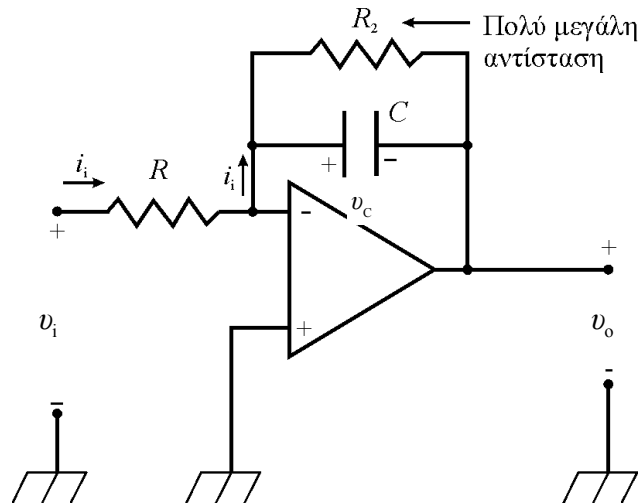
Ο κανόνας του Kirchhoff των τάσεων δίνει $-v_i + v_c = 0$ άρα $v_i = v_c$ επομένως

$$i_i = C \frac{dv_i}{dt} \quad \text{και} \quad v_o = i_R R = -i_i R \Rightarrow -\frac{v_o}{R} = C \frac{dv_i}{dt} \quad \text{ή}$$

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt}$$

Συνεπώς το παραπάνω κύκλωμα πράγματι κάνει διαφορίση.

Ολοκληρωτής



Σχήμα 2.9

Έχουμε $i_i = \frac{v_i}{R}$, αν υποθέσουμε ότι για $t=0$ έχουμε $v_c=0$, τότε $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_i(\lambda) d\lambda$.

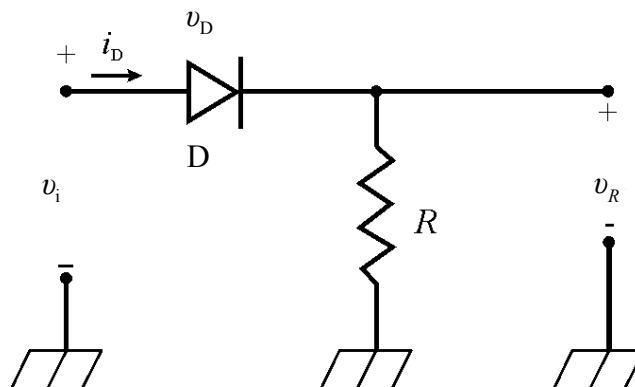
Όμως $v_o(t) = -v_c(t)$ (αφού $v_c + v_o = 0$).

Άρα $v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(\lambda) d\lambda$.

Δηλαδή πράγματι το παραπάνω κύκλωμα κάνει ολοκλήρωση της $v_i(t)$.

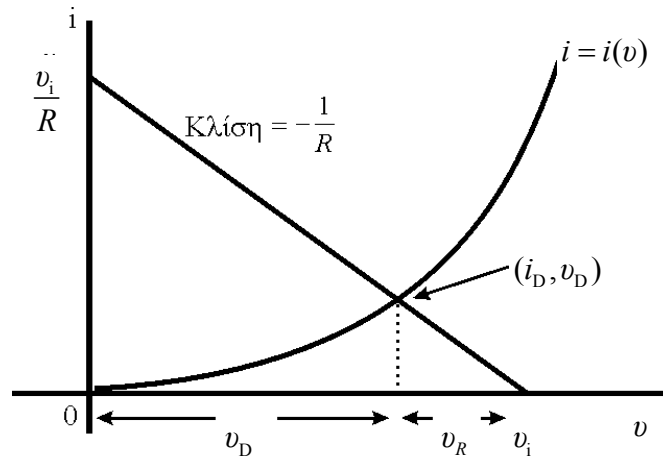
B. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Απλός ανορθωτής με δίοδο.



Σχήμα 2.10

Για το κύκλωμα του Σχήματος 2.10, να βρεθούν το ρεύμα i_D και οι τάσεις v_R και v_D αν είναι δεδομένα τα v_i , η δίοδος και το R . Υποτίθεται ότι ξέρουμε τη χαρακτηριστική της διόδου D , δηλαδή τη σχέση $i_D = i(v_D)$, Σχήμα 2.11.



Σχήμα 2.11

Ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων,

$$\left. \begin{array}{l} i = i(v_D) \\ v_i = v_D + iR \end{array} \right\}, (iR = v_R). \text{ Προφανώς } v_i = v_D + v_R.$$

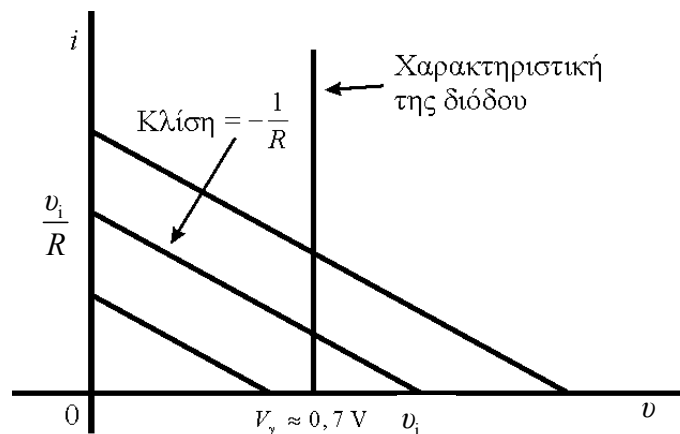
Για δεδομένο v_i η δεύτερη εξίσωση παριστάνει ευθεία με μεταβλητές τα i, v_D .

$$i = -\frac{1}{R}v_D + \frac{v_i}{R}$$

Η γραφική παράσταση αυτής της σχέσης (ευθείας) φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Είναι προφανές ότι η λύση που αντιστοιχεί βρίσκεται γραφικά από το σημείο τομής της χαρακτηριστικής της διόδου και της ευθείας που λέγεται ευθεία φόρτου. Είναι προφανές ότι τα v_D, i_D ικανοποιούν τις δύο σχέσεις του συστήματος, δηλαδή τη σχέση της χαρακτηριστικής της διόδου και τη σχέση της ευθείας φόρτου. Ισχύει

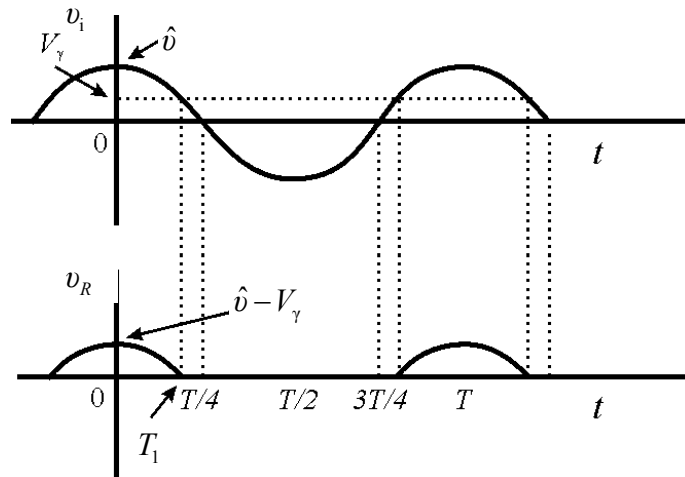
$$v_i = v_D + v_R.$$

Αν υποθέσουμε για απλότητα ότι η χαρακτηριστική της διόδου είναι όπως στο Σχήμα 2.12 και η είσοδος είναι αρμονική με το χρόνο τότε έχουμε διάφορες ευθείες φόρτου όπως φαίνονται στο ίδιο σχήμα.



Σχήμα 2.12

Είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι αν $v_i = \hat{v} \cos(\omega t)$ τότε η έξοδος θα είναι $v_R = \hat{v} \cos(\omega t) - V_\gamma$ για χρόνους τέτοιους που $\hat{v} \cos(\omega t) - V_\gamma \geq 0$. Επίσης $v_R = 0$ για t τέτοιο που $\hat{v} \cos(\omega t) - V_\gamma < 0$, Σχήμα 2.13.

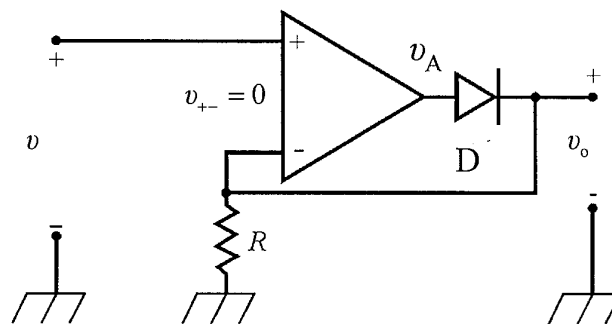


Σχήμα 2.13

Παρατηρούμε ότι η ημιανόρθωση δεν είναι ιδανική αφού αν το αρμονικό σήμα έχει πλάτος μικρότερο από $V_\gamma = 0,7 \text{ V}$, τότε η έξοδος, v_R , είναι συνεχώς μηδέν.

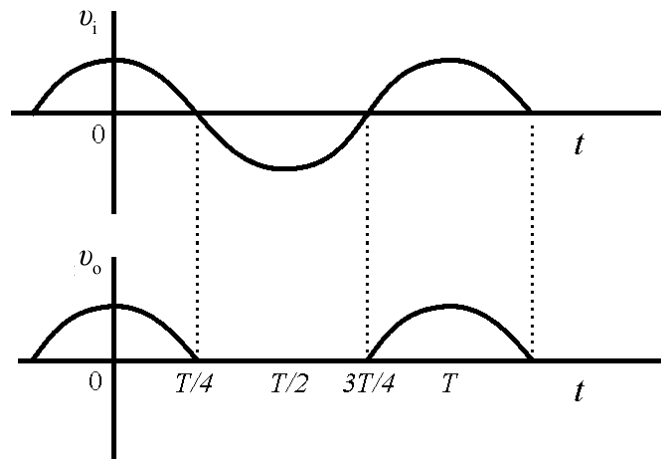
Ανορθωτής με τελεστικό ενισχυτή.

Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14

Οι τάσεις φαίνονται στο Σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15

Αν $v_i > 0$ τότε $v_A > v_i > 0$ επειδή το σήμα v_i είναι στη μη αναστρέφουσα είσοδο (+) και η διόδος άγει άρα ένεκα αρνητικής ανασύζευξης η τάση στην είσοδο (-) θα είναι, πράγματι, σχεδόν (διαφορά mV) ίση με αυτή του ακροδέκτη (+). Έχουμε επομένως ότι

$$\text{όταν } v_i > 0, \quad v_o = v_i$$

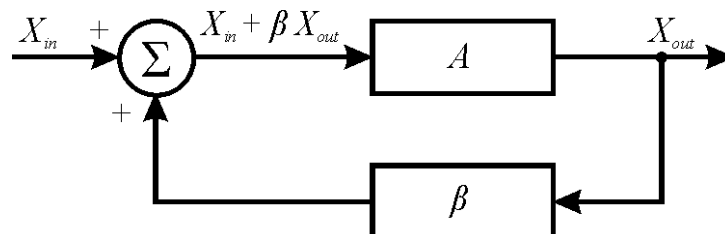
Αν $v_i < 0$ η έξοδος v_A θα είναι αρνητική και θα ισχύει: $v_A < v_i$ άρα η διόδος θα είναι ανάστροφα πολωμένη, δεν θα άγει και το ρεύμα δια της R θα είναι μηδέν, άρα $v_o = iR = 0$.

Επομένως,

$$\text{όταν } v_i < 0, \quad v_o = 0$$

Παρατηρούμε ότι με αυτό το κύκλωμα πράγματι επιτυγχάνεται ιδανική (ημι)ανόρθωση.

Θετική ανασύζευξη-ταλαντώσεις.



Σχήμα 2.16

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι σχεδιασμού κυκλωμάτων ταλαντωτών. Εδώ θα θεωρήσουμε την περίπτωση που χρησιμοποιείται κύκλωμα ανασύζευξης που επιλέγει (σχεδόν) μία μοναδική συχνότητα, επιστρέφει μέρος του σήματος εξόδου στην είσοδο και αυτό οδηγεί στο κύκλωμα του γραμμικού ταλαντωτή που παράγει περίπου αρμονική έξοδο.

Κριτήριο του Barkhausen.

Στο Σχήμα 2.16 θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιο σήμα X_{in} στην είσοδο. (Θεωρούμε μιγαδικά μεγέθη, φάσορες). Η έξοδος είναι X_{out} . Τα A και β εξαρτώνται γενικώς από τη συχνότητα, f .

Ισχύει προφανώς:

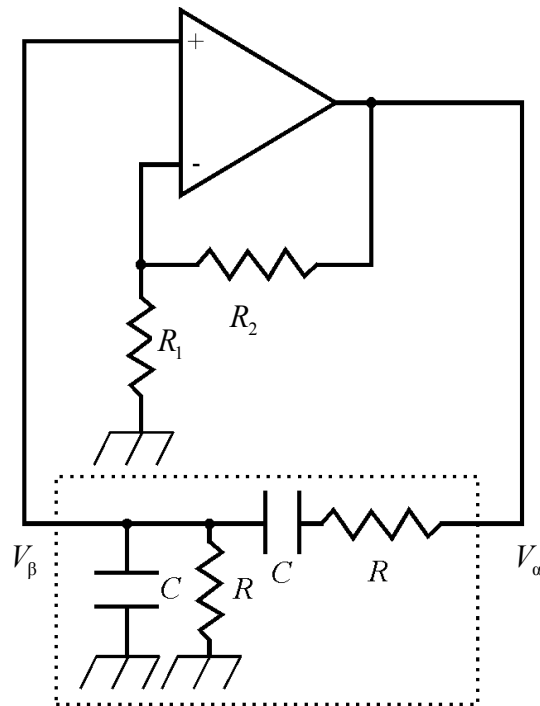
$$X_{out} = A(f)[X_{in} + \beta(f)X_{out}] \quad \text{άρα} \quad X_{out} = \frac{A(f)}{1 - A(f)\beta(f)} X_{in}. \quad \text{Αν δεν υπάρχει σήμα}$$

στην είσοδο, δηλαδή $X_{in} = 0$, και θέλουμε να υπάρχει $X_{out} \neq 0$ τότε αναγκαία συνθήκη είναι να ισχύει $1 - A(f)\beta(f) = 0$. Άρα για αυθόρμητες ταλαντώσεις πρέπει $A(f)\beta(f) = 1$.

Αυτό λέγεται κριτήριο Barkhausen. Το γινόμενο $A(f)\beta(f)$ λέγεται ενίσχυση βρόχου διότι ο ενισχυτής και η διαδρομή της ανασύζευξης σχηματίζουν βρόχο. Ουσιαστικά αυτό το κριτήριο λέει ότι, η γωνία (φάση) της ενίσχυσης βρόχου είναι μηδέν, δηλαδή φάση $[A(f)\beta(f)] = 0$ και επίσης το μέτρο της ενίσχυσης βρόχου είναι ίσο με τη μονάδα $|A(f)\beta(f)| = 1$.

Οι ταλαντωτές αυτού του τύπου σχεδιάζονται έτσι ώστε να έχουν μέτρο ενίσχυσης βρόχου λίγο μεγαλύτερο της μονάδας και αυτό, ενώ δεν φαίνεται από το κριτήριο του Barkhausen, μπορεί να αποδειχτεί ότι οδηγεί σε ταλαντώσεις με αυξανόμενο με το χρόνο πλάτος. Η αύξηση όμως δεν γίνεται επ' άπειρον διότι το σύστημα φτάνει στα μη γραμμικά μέρη του ενισχυτή όπου αλλάζουν οι παράμετροί του έτσι που οι ταλαντώσεις γίνονται σταθερού πλάτους με μηδαμινή παραμόρφωση. Αν ήταν ακριβώς 1 τότε μικρή μείωση της ενίσχυσης θα οδηγούσε σε απόσβεση της ταλάντωσης. Το ότι ξεκινά ο ταλαντωτής χωρίς φαινομενικά αρχικό σήμα στην είσοδο, οφείλεται στο γεγονός ότι πάντα υπάρχει θόρυβος στην είσοδο που αρκεί για να ξεκινήσει το σύστημα. Ας σημειωθεί ότι «ο θόρυβος» επιδρά σε όλα τα συστήματα που βρίσκονται σε ασταθή ισορροπία και τα κάνει να φύγουν από αυτή τη κατάσταση, π.χ. αντεστραμμένο εκκρεμές κ.τ.λ.

Ταλαντωτής γέφυρας – του Wien.



Σχήμα 2.17

Η ενίσχυση τάσης του τελεστικού ενισχυτή με τους αντιστάτες R_1, R_2 είναι $A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Ας υπολογίσουμε το $\beta(f)$.

$$\beta(f) = \frac{V_\beta}{V_\alpha} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}} \Rightarrow \beta(f) = \frac{R}{3R + j(\omega R^2 C - \frac{1}{\omega C})}$$

Το κριτήριο barkhausen δίνει $A_v \beta = 1 \Rightarrow \frac{A_v R}{3R + j(\omega R^2 C - \frac{1}{\omega C})} = 1$ ή

$$R(3 - A_v) + j(\omega R^2 C - \frac{1}{\omega C}) = 0 \quad \text{άρα}$$

$$R(3 - A_v) = 0$$

$$\omega R^2 C - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Επομένως η ενίσχυση που χρειάζεται είναι: $A_{v \min} = 3$ (όπως αποδεικνύεται αυτή είναι η ελάχιστη) και η συχνότητα ταλάντωσης είναι ($\omega = 2\pi f$): $f = \frac{1}{2\pi RC}$. Από τη σχέση

$$A_v \geq A_{v \min} = 3 \Rightarrow A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1} \geq 3 \quad \text{ή}$$

$$R_2 \geq 2R_1.$$

Αν το R_2 είναι αρκετά μεγαλύτερο του $2R_1$ έχουμε μεγάλη παραμόρφωση, δηλαδή μεγάλο ψαλιδισμό της εξόδου, δηλαδή των ταλαντώσεων. Διαλέγουμε το R_2 λίγο μεγαλύτερο του $2R_1$ αυτό οδηγεί σε $|A_v|$ λίγο μεγαλύτερο της μονάδας οπότε και ταλαντώσεις παράγονται και δεν έχουν ουσιαστική παραμόρφωση.

3. ΨΗΦΙΑΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ

Ψηφιακή λογική – Λογικές πύλες

Στον Πίνακα 3.1 έχουμε τις αντιστοιχίες μεταξύ μαθηματικής δυαδικής αναπαράστασης – λογικής αναπαράστασης – ηλεκτρικής αναπαράστασης και αναπαράστασης με διακόπτες.

Πίνακας 3.1
(Θετική λογική)

Δυαδική	0	1
Λογική	FALSE (ΨΕΥΔΕΣ)	TRUE (ΑΛΗΘΕΣ)
Ηλεκτρική τάση	LOW	HIGH
Διακόπτης	OFF (ΕΚΤΟΣ)	ON (ΕΝΤΟΣ)

Πίνακας 3.2

(Στάθμες τάσεων διαφόρων προτύπων)

Ηλεκτρική τάση	LOW	HIGH
Πρότυπο TTL	0 ... 0,8 V	2 ... 5 V
Πρότυπο CMOS	0 ... $0,3 \times V_{CC}$	$0,6 \times V_{CC}$... V_{CC}
Πρότυπο RS232 (Σειριακή θύρα)	+12 V	-12 V
V_{CC} είναι η τάση τροφοδοσίας του ολοκληρωμένου		

Όταν το HIGH σημαίνει TRUE όπως στον Πίνακα 3.1, τότε λέμε ότι έχουμε θετική λογική, όταν το HIGH σημαίνει FALSE έχουμε αρνητική λογική. Θα περιοριστούμε στη θετική λογική.

Στην Αμερικάνικη βιβλιογραφία τα σύμβολα H και L σημαίνουν HIGH και LOW αντιστοίχως. Μερικές φορές, στην ευρωπαϊκή βιβλιογραφία L σημαίνει HIGH και 0 LOW.

Στα ψηφιακά κυκλώματα σε αντίθεση με τα αναλογικά τα σήματα εισόδου και εξόδου δεν μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο αλλά μπορεί να βρίσκονται μόνο σε μία από δύο καταστάσεις.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΟΥ BOOLE

α) Βασικοί ορισμοί (έννοιες).

1. Κλειστότητα (Closure).

Ένα σύνολο, S , είναι κλειστό ως προς έναν δυαδικό τελεστή (δηλαδή τελεστή που δρα μεταξύ δύο στοιχείων του συνόλου), αν σε κάθε ζευγάρι στοιχείων του S ο τελεστής αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο που ανήκει στο S .

2. Προσεταιριστικός νόμος (Associative law).

Ο δυαδικός τελεστής, γενικώς σύμβολο $*$, (εδώ θα έχουμε τα ειδικά σύμβολα \cdot και $+$) είναι προσεταιριστικός αν $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in S$

3. Αντιμεταθετικός νόμος (Commutative law).

Ο δυαδικός τελεστής $*$ είναι αντιμεταθετικός αν $x * y = y * x \quad \forall x, y \in S$

4. Ουδέτερο στοιχείο (ή Στοιχείο ταυτότητας) (Identity Element).

Ουδέτερο είναι το στοιχείο, e , του S για το οποίο ισχύει: $e * x = x * e = x \quad \forall x \in S$

5. Αντίστροφο στοιχείο (Inverse).

Το $y \in S$ είναι αντίστροφο του $x \in S$ αν $x * y = e$ (Προφανώς αντίστροφο του y είναι το x).

6. Επιμεριστικός νόμος (Distributive law)

Αν $*$ και \otimes δύο δυαδικοί τελεστές στο σύνολο S , ο τελεστής $*$ λέγεται επιμεριστικός ως προς το τελεστή \otimes αν $x * (y \otimes z) = (x * y) \otimes (x * z)$

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΟΥ BOOLE ή ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ HUNTINGTON

Ορισμός: Η άλγεβρα του Boole είναι ένα σύστημα $\Sigma = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$, όπου B είναι ένα σύνολο βασικών (τουλάχιστο δύο) στοιχείων (a, b, c, x, y, z, \dots) τα 0 και 1 είναι οι τιμές του καθενός στοιχείου του B (μεταβλητές του Boole). Τα σύμβολα $+$ (πρόσθεση, OR, ή), \cdot (επί, AND, και), $\bar{\quad}$ (συμπλήρωμα, αντιστροφή, άρνηση), αντιπροσωπεύουν βασικές λειτουργίες ενός συνόλου αξιωμάτων που καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των βασικών στοιχείων. Το σύμβολο $=$ χρησιμοποιείται για να δείξει ισότητα. Με τον κατάλληλο συνδυασμό των βασικών στοιχείων και σύμφωνα με τα αξιώματα της άλγεβρας του Boole, φτιάχνονται νέα μέλη του συνόλου και αυτή η αντιστοίχιση λέγεται συνάρτηση του Boole ή λογική συνάρτηση.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ BOOLE

Η άλγεβρα του Boole:

- (α) Είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $+$
(β) Είναι κλειστή ως προς τον τελεστή \cdot

- (α) Έχει ένα ουδέτερο στοιχείο ως προς τον $+$, το 0.
 $0 + x = x + 0 = x \quad \forall x \in S$

- (β) Έχει ένα ουδέτερο στοιχείο ως προς τον τελεστή \cdot , το 1.
 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in S$

3. (α) Είναι αντιμεταθετική ως προς $+$, $x + y = y + x$
 (β) Είναι αντιμεταθετική ως προς \cdot , $x \cdot y = y \cdot x$
4. (α) Ο τελεστής \cdot είναι επιμεριστικός ως προς τον $+$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
 (β) Ο τελεστής $+$ είναι επιμεριστικός ως προς τον \cdot , $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
5. Για κάθε στοιχείο x της άλγεβρας του Boole ($x \in B$), \exists ένα \bar{x} (ή x') $\in B$ (το συμπλήρωμα, το αντίστροφο, του x , complement) έτσι ώστε
 (α) $x + \bar{x} = 1$
 (β) $x \cdot \bar{x} = 0$
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $x, y \in B$ που $x \neq y$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ BOOLE (πολλές φορές το \cdot παραλείπεται)

1) $x + x = x$		
Απόδειξη	$x + x = (x + x) \cdot 1$, Αξ. 2β
	$= (x + x) \cdot (x + \bar{x})$, Αξ. 5α
	$= x + (x\bar{x})$, Αξ. 4β
	$= x + 0$, Αξ. 5β
	$= x$, Αξ. 2α
2) $x x = x$		
Απόδειξη	$xx = (xx) + 0$, Αξ. 2α
	$= (xx) + (x\bar{x})$, Αξ. 5β
	$= x(x + \bar{x})$, Αξ. 4α
	$= x \cdot 1$, Αξ. 5α
	$= x$, Αξ. 2β
3) $x + 1 = 1$		
Απόδειξη	$x + 1 = (x + 1) \cdot 1$, Αξ. 2β
	$= (x + 1) \cdot (x + \bar{x})$, Αξ. 5α
	$= x + (1 \cdot \bar{x})$, Αξ. 4β
	$= x + \bar{x}$, Αξ. 2β
	$= 1$, Αξ. 5α
4) $x \cdot 0 = 0$		
Απόδειξη	$x \cdot 0 = (x \cdot 0) + 0$, Αξ. 2α
	$= (x \cdot 0) + (x \bar{x})$, Αξ. 5β
	$= x(0 + \bar{x})$, Αξ. 4α
	$= x \bar{x}$, Αξ. 2α
	$= 0$, Αξ. 5β

$$5) x + x y = x$$

Απόδειξη	$x + x y = x \cdot 1 + x y$, Αξ. 2β
	$= x(1 + y)$, Αξ. 4α
	$= x(y + 1)$, Αξ. 3α
	$= x \cdot 1$, Αξ. 3
	$= x$, Αξ. 2β

$$6) x(x + y) = x$$

Απόδειξη	$x(x + y) = x x + x y$, Αξ. 4α
	$= x + x y$, Θεώρ. 2
	$= x$, Θεώρ. 5

7) Το \bar{x} είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο συμπληρώματα του x τα x_1 και x_2 . Τότε:

$$7.1 \begin{cases} x + x_1 = 1, x + x_2 = 1 & , \text{Αξ. 5α} \\ \text{και } x x_1 = 0, x x_2 = 0 & , \text{Αξ. 5β} \end{cases}$$

Από Αξίωμα 2β έχουμε:

$x_2 = x_2 \cdot 1$	
$= x_2(x + x_1)$, Σχέσεις 7.1
$= x_2 x + x_2 x_1$, Αξ. 4α
$= x x_2 + x_1 x_2$, Αξ. 3β
$= 0 + x_1 x_2$, Σχέσεις 7.1
$= x_1 x + x_1 x_2$, Σχέσεις 7.1, Αξ. 3β
$= x_1(x + x_2)$, Αξ. 4α
$= x_1 \cdot 1$, Σχέσεις 7.1
$= x_1$, Αξ. 2β

‘Αρα υπάρχει ένα μοναδικό \bar{x} .

$$8) \bar{\bar{x}} = x$$

Απόδειξη

Το \bar{x} είναι το συμπλήρωμα του x , άρα $\bar{x} + x = 1$, $x \bar{x} = 0$, από το Αξ. 5.

Το $\bar{\bar{x}}$ είναι το συμπλήρωμα του \bar{x} και από το θεώρημα 7 το x είναι μοναδικό συμπλήρωμα του \bar{x} , άρα $\bar{\bar{x}} = x$

$$9) \text{Θεώρημα του De Morgan I: } \overline{x + y} = \bar{x} \bar{y}$$

Απόδειξη

$(x + y) + \bar{x} \bar{y} = ((x + y) + \bar{x})(x + y) + \bar{y}$, Αξ. 4β
$= ((y + x) + \bar{x})(x + (y + \bar{y}))$, Αξ. 3α, προσεταιρ. ιδιότητα
$= (y + (x + \bar{x}))(x + 1)$, Αξ. 5α, προσεταιρ. ιδιότητα
$= (y + 1) \cdot 1$, Αξ. 5α, Θεώρ. 3
$= 1$, Αξ. 2β, Θεώρ. 3

Επίσης: $(x + y)(\bar{x} \bar{y}) = x(\bar{x} \bar{y}) + y(\bar{x} \bar{y})$, Αξ. 4α
$= (x \bar{x}) \bar{y} + y(\bar{y} \bar{x})$, Αξ. 3β, προσεταιρ. ιδιότητα
$= 0 + (y \bar{y}) \bar{x}$, Αξ. 5β, προσεταιρ. ιδιότητα
$= 0$, Αξ. 5β

Άρα:

$$(x+y) + \bar{x}\bar{y} = 1 \text{ και } (x+y)(\bar{x}\bar{y}) = 0$$

Άρα τα $(x+y)$ και $(\bar{x}\bar{y})$ είναι το συμπλήρωμα το ένα του άλλου.

Από το θεώρημα 7 προκύπτει ότι το συμπλήρωμα είναι μοναδικό. Προφανώς ισχύει:

$$\overline{x+y} = \bar{x}\bar{y}$$

10) Θεώρημα του De Morgan II: $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} & (\bar{x} + \bar{y}) + xy = \\ & = ((\bar{x} + \bar{y}) + x)((\bar{x} + \bar{y}) + y) \quad , \text{ Αξ. 4β} \\ & = ((\bar{y} + \bar{x}) + x)(\bar{x} + (\bar{y} + y)) \quad , \text{ Αξ. 3α, προσεταιρ. ιδιότητα} \\ & = (\bar{y} + (\bar{x} + x))(\bar{x} + 1) \quad , \text{ Αξ. 5α, προσεταιρ. ιδιότητα} \\ & = (\bar{y} + 1) \cdot 1 \quad , \text{ Αξ. 5α, Θεώρ. 3} \\ & = 1 \quad , \text{ Αξ. 2β, Θεώρ. 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης: } & (\bar{x} + \bar{y})(x + y) = \bar{x}(x + y) + \bar{y}(x + y) \quad , \text{ Αξ. 4α} \\ & = (\bar{x}x)y + \bar{y}(yx) \quad , \text{ Αξ. 3β, προσεταιρ. ιδιότητα} \\ & = 0 + (\bar{y}y)x \quad , \text{ Αξ. 5β, προσεταιρ. ιδιότητα} \\ & = 0 \quad , \text{ Αξ. 5β} \end{aligned}$$

Άρα τα $\bar{x} + \bar{y}$ και xy είναι το συμπλήρωμα το ένα του άλλου.

Από το Θεώρημα 7 προκύπτει ότι το συμπλήρωμα είναι μοναδικό. Προφανώς ισχύει:

$$\overline{\bar{x} + \bar{y}} = xy$$

11) $x + \bar{x}y = x + y$

Απόδειξη

Ισχύει

$$\begin{aligned} x + \bar{x}y & = (x + \bar{x})(x + y) \quad , \text{ Αξ. 4β} \\ & = x + y \quad , \text{ Αξ. 5α} \end{aligned}$$

12) $x(\bar{x} + y) = xy$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} x(\bar{x} + y) & = x\bar{x} + xy \quad , \text{ Αξ. 4α} \\ & = 0 + xy \quad , \text{ Αξ. 5β} \\ & = xy \quad , \text{ Αξ. 2α} \end{aligned}$$

13) $xz + \bar{x}y = (x + y)(\bar{x} + z)$

14) $\overline{xz + yz} = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$

15) $\overline{(x + z)(y + z)} = (\bar{x} + z)(\bar{y} + z)$

Παρατηρούμε Δυϊσμό (duality) στις σχέσεις που χαρακτηρίζονται (α) και (β). Η άλγεβρα του Boole είναι δίτιμη, δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου B παίρνουν τιμές 0 και 1.

Αν θέλουμε τη δυϊκή μίας παράστασης εναλλάσσουμε τα + και \cdot και τα 0 και 1 (\bar{x} και x).

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ (PRECEDENCE)

Προτεραιότητα των «πράξεων» στις εκφράσεις του Boole,

- (1) Παρενθέσεις (),
- (2) Συμπλήρωμα (αντιστροφή, άρνηση), $\bar{\quad}$,
- (3) Πολλαπλασιασμός, \cdot ,
- (4) Πρόσθεση +.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- 1) Στην περίπτωση της καθαρά συνδυαστικής λογικής, το σύστημα δεν έχει μνήμη και οι έξοδοι κάποια χρονική στιγμή καθορίζονται πλήρως από τις εισόδους την ίδια στιγμή (βλέπετε τις διάφορες λογικές πύλες).
- 2) Στην περίπτωση της σειριακής λογικής, το σύστημα έχει μνήμη. Το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα μέρος καθαρά συνδυαστικό και από ένα άλλο που είναι η μνήμη. Έτσι οι έξοδοι θα εξαρτώνται από τις εισόδους και από το τι έχει γίνει προηγουμένως που έχει μείνει στη μνήμη. Για παράδειγμα, στη περίπτωση του υπολογιστή τσέπης, όταν πατήσουμε το πλήκτρο = (ίσον) (αυτό είναι η είσοδος) τότε στην έξοδο θα εμφανιστεί κάτι που εξαρτάται από τι υπάρχει στη μνήμη που είναι ουσιαστικά αποθήκευση του τι πλήκτρα πατήθηκαν πριν το ίσον. Αν για παράδειγμα πατήθηκαν τα πλήκτρα 3, +, 5, τότε αυτές οι πληροφορίες μπήκαν στη μνήμη και το πάτημα του = έδωσε το αποτέλεσμα 8 (πρόσθεση). Αν είχαν πατηθεί τα 5, -, 7 με την ίδια είσοδο (δηλαδή το =) το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό, θα ήταν -2

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Λογικά κυκλώματα.

Υπάρχουν μικροδιαφορές στους συμβολισμούς. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό ASA (American Standards Association, Ένωση Αμερικανικών Προτύπων).

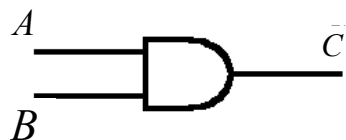
Τα βασικά στοιχεία λογικών κυκλωμάτων είναι οι πύλες (gate). Οι πίνακες αληθείας (ή λογικοί πίνακες) καθορίζουν πλήρως τη λειτουργία της πύλης.

Αυτό σημαίνει ότι δίνεται η έξοδος για κάθε συνδυασμό εισόδων της πύλης, με TRUE = 1 και FALSE = 0.

ΠΥΛΗ AND (ΚΑΙ)

Γενικώς για πολλές εισόδους ισχύει: $C = A B D \dots$. Η έξοδος της πύλης AND είναι 1 όταν και μόνον όταν όλες οι εισοδοί είναι 1, αλλιώς είναι μηδέν. Για δύο εισόδους έχουμε,

AND



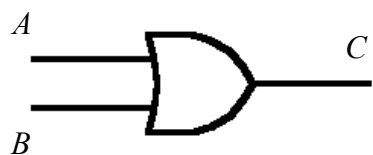
$$C = A \cdot B$$

A	B	$C = A B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΠΥΛΗ OR (περιεκτικό ή, inclusive OR)

Γενικώς, $C = A + B + D \dots$ Η έξοδος είναι 1 αν μία τουλάχιστον είσοδος είναι 1, αλλιώς είναι 0. Για δύο εισόδους έχουμε,

OR



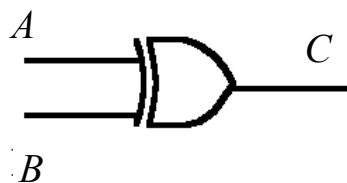
$$C = A + B$$

A	B	$C = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ΠΥΛΗ EX-OR (Exclusive OR, αποκλειστικό ή)

Γενικώς, $C = A \oplus B \oplus D \dots$ Η έξοδος είναι 1 όταν από όλες τις εισόδους μια τουλάχιστον είναι 1 αλλά όταν όλες είναι 1 τότε η έξοδος είναι 0. Για δύο εισόδους έχουμε,

EX-OR



$$C = A \oplus B$$

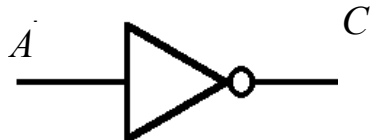
$$C = A\bar{B} + \bar{A}B$$

A	B	$C = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ΑΝΑΣΤΡΟΦΕΑΣ (inverter), NOT

Ο αναστροφέας έχει μία είσοδο και μία έξοδο.

NOT



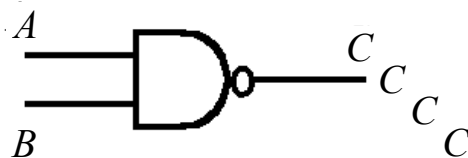
$$C = \bar{A}$$

A	$C = \bar{A}$
0	1
1	0

ΠΥΛΗ NAND (NOT AND)

Γενικώς $C = \overline{A \cdot B}$... Για δύο εισόδους έχουμε,

NAND



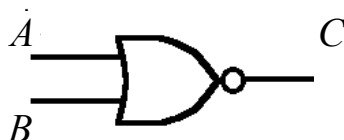
$$C = \overline{A \cdot B}$$

A	B	$C = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ΠΥΛΗ NOR (NOT OR)

Γενικώς $C = \overline{A + B}$... Για δύο εισόδους έχουμε,

NOR



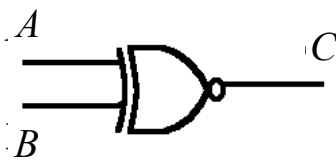
$$C = \overline{A + B}$$

A	B	$C = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ΠΥΛΗ EX - NOR

Γενικώς $C = \overline{A \oplus B \oplus D \dots}$. Για δύο εισόδους έχουμε,

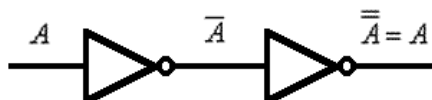
EX - NOR



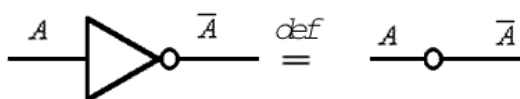
$$C = \overline{A \oplus B}$$

A	B	$C = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

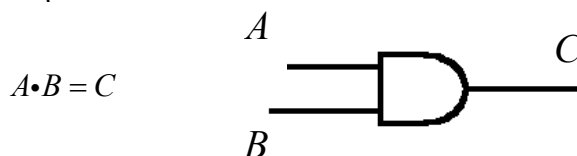
ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ



Το ανοιχτό κυκλάκι, ο, σε είσοδο ή έξοδο σημαίνει αναστροφή (συμπλήρωμα). Δηλαδή,



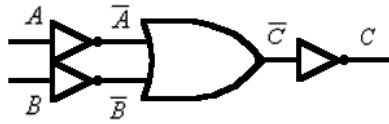
Από τη σχέση $AB = C$ έχουμε $\overline{A+B} = \overline{C}$ (Θεώρημα του De Morgan)
Δηλαδή από



προκύπτει



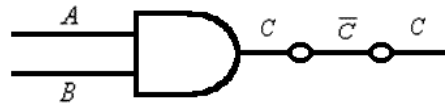
ή ισοδύναμα



Αν σκεφτούμε ότι

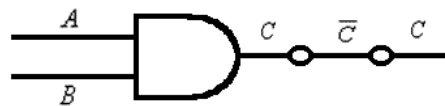


ισοδυναμεί με



μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν μετακινούμε κυκλάκι από την έξοδο στις εισόδους προκύπτει ισοδύναμη πύλη, αλλά αν η αρχική ήταν OR γίνεται AND και αντιστρόφως (δυσικότητα).

Πράγματι,



ισοδυναμεί με



ισοδυναμεί με



Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την αρχική πύλη AND.

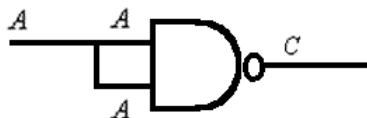
ΒΑΣΙΚΑ ΓΙΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Σύνθεση πυλών από μόνο NAND ή μόνο NOR.

Γενικώς μπορεί κάποιος να ξεκινήσει από κάποια πύλη που έχει αναστροφή και να φτιάξει οποιαδήποτε άλλη πύλη. Γι' αυτό οι πύλες NAND και NOR υπερτερούν έναντι των άλλων οι οποίες δεν έχουν αναστροφή.

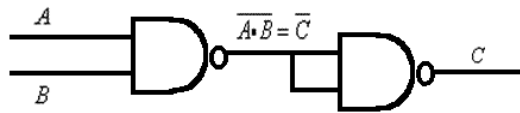
Παραδείγματα

1) Αναστροφείας



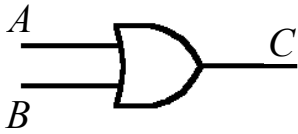
$$C = \overline{A \cdot A} = \overline{A} \quad (\text{Θεώρημα 2})$$

2) AND



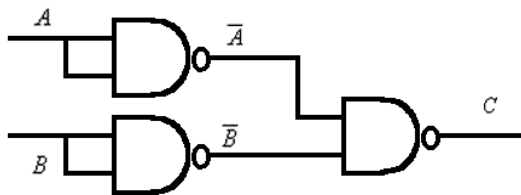
Προφανές αφού $C = AB$ άρα $C = \overline{\overline{AB}}$

3) Πύλη OR



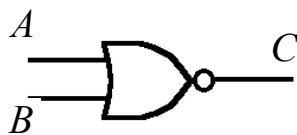
$$C = A + B$$

Από $C = A + B$ με το θεώρημα του De Morgan καταλήγουμε στην $\overline{C} = \overline{A + B}$ ή $\overline{\overline{C}} = C = \overline{\overline{A + B}}$ άρα:



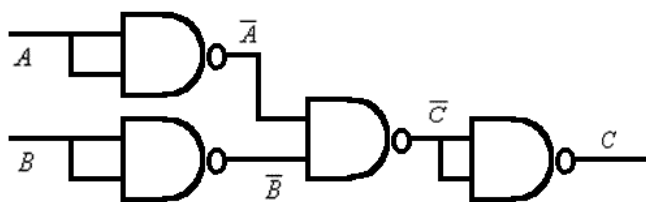
$$C = \overline{\overline{A + B}}$$

4) Πύλη NOR



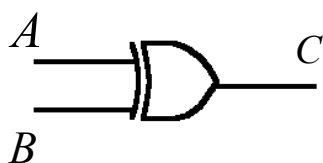
$$C = \overline{A + B}$$

Από $C = \overline{A + B}$ προκύπτει με το θεώρημα του De Morgan, αφού $\overline{C} = A + B$, $\overline{\overline{C}} = \overline{A + B} = C$. Άρα



$$C = \overline{\overline{A + B}}$$

5) Αποκλειστικό OR (EX-OR)



$$C = A \oplus B$$

$$C = A\overline{B} + \overline{A}B$$

Άρα, $C = \bar{A}A + \bar{B}A + \bar{A}B + \bar{B}B$

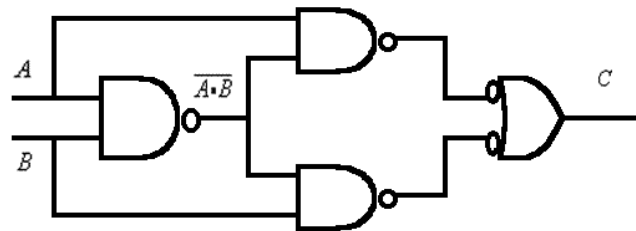
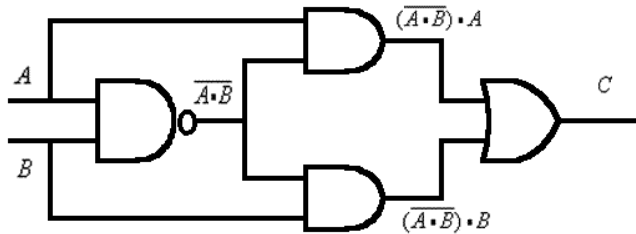
αφού $\bar{A}A = \bar{B}B = 0$, Αξ. 5β

άρα $C = (\bar{A} + \bar{B})A + (\bar{A} + \bar{B})B = (\bar{A} + \bar{B})(A + B)$, Αξ. 4α

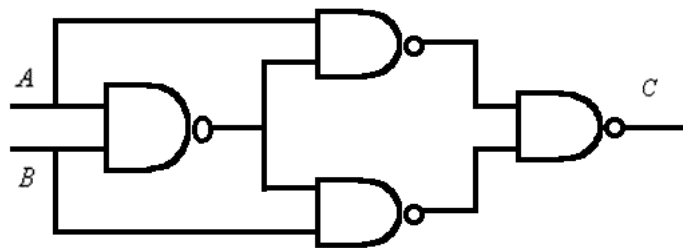
Από το θεώρημα του De Morgan προκύπτει ότι,

$C = (\overline{A\bar{B}})(A + B)$ ή $C = (\overline{A\bar{B}})A + (\overline{A\bar{B}})B$

άρα,



τελικώς,

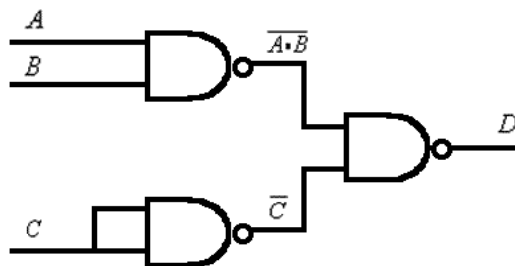


ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΠΥΛΕΣ NAND ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΣΗ $D = (\overline{A\bar{B}}) + C$.

Έχουμε,

$\bar{D} = ((\overline{A\bar{B}})\bar{C})$, $D = \overline{((\overline{A\bar{B}})\bar{C})}$

άρα,

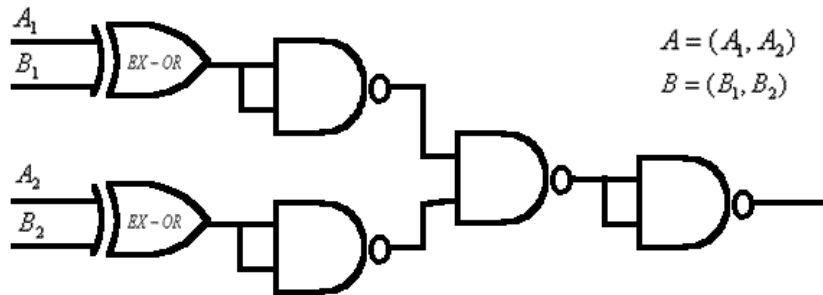


ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΠΥΛΕΣ NAND ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ A,B ΜΕ ΔΥΟ ΨΗΦΙΑ (bit) Ο ΚΑΘΕΝΑΣ

Συγκριτής σημαίνει ότι αν $A = B$ η έξοδος του είναι $C = 1$ ενώ αν $A \neq B$ η έξοδος του είναι $C = 0$. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την πύλη EX-OR ή καλύτερα την EX-NOR που προκύπτει από την EX-OR με έναν αναστροφέα στην έξοδο. Η πύλη EX-NOR έχει πίνακα αλήθειας τον κατωτέρω,

A	B	$C = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Είναι ευνόητο ότι αν τα δύο bit είναι ίδια η έξοδος είναι 1 αν δεν είναι τότε η έξοδος είναι μηδέν (0). Άρα καταλήγουμε εύκολα στο κύκλωμα,

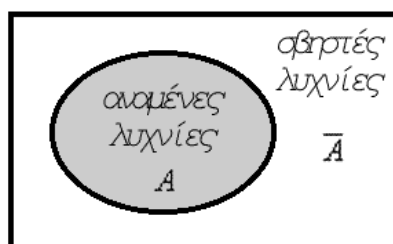


Προφανώς οι EX-OR έχουν φτιαχτεί με πύλες NAND στο παράδειγμα (5) προηγουμένως άρα όλα τα στοιχεία είναι πύλες NAND.

ΛΟΓΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ - ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN

Η άλγεβρα του Boole σχετίζεται με την άλγεβρα των τάξεων (συνόλων) και μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα διαγράμματα Venn για να δοθεί μια γραφική αναπαράσταση των πράξεων του Boole.

Όλα τα πράγματα μπορεί να παρασταθούν με τάξεις (δηλαδή με σύνολα). Το σύνολο όλων των πραγμάτων (που μας ενδιαφέρουν κάθε φορά), λέγεται καθολικό σύνολο ή καθολική τάξη ή παγκόσμιο σύνολο ή απλώς σύνολο. Για παράδειγμα το σύνολο των λυχνιών που είναι αναμένες μπορεί να θεωρηθεί ως συμπληρωματικό (συμπλήρωμα) του συνόλου των λυχνιών που είναι σβηστές. Τα δύο αυτά σύνολα σχηματίζουν ένα καθολικό σύνολο. Τα στοιχεία του συνόλου μπορεί να είναι από ένα μέχρι άπειρα.

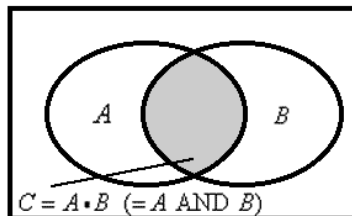


Σχήμα 3.1

Τα σύνολα μπορεί να παρασταθούν με τα διαγράμματα Venn (Ο Venn ήταν Άγγλος Μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα). Η καθολική τάξη (σύνολο) παριστάνεται με ένα ορθογώνιο όπως στο Σχήμα 3.1. η καθολική τάξη περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν (εδώ όλες τις λάμπες). Υποσύνολα του καθολικού συνόλου είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος που παριστάνει τις

αναμένεις λυχνίες, A . Το μέρος του ορθογωνίου έξω από το γραμμοσκιασμένο παριστάνει τις σβηστές λυχνίες, \bar{A} .

Αν ορίσουμε και άλλα σύνολα, όπως π.χ. κόκκινες και μη κόκκινες λυχνίες, με αντίστοιχα σύμβολα B και \bar{B} , τότε είναι δυνατόν τα διάφορα στοιχεία να ανήκουν σε δύο υποσύνολα. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.2.

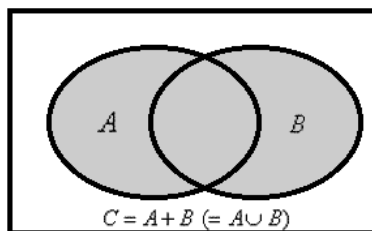


Σχήμα 3.2

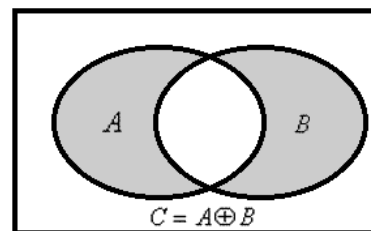
Ορίζεται έτσι το σύνολο των λυχνιών, C , που ανάβουν και είναι κόκκινες. Αυτό είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του Σχήματος 2. Το C είναι η τομή (επικάλυψη) των A και B . Χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $C = A \cap B$ (A και B). Το Σχήμα 3.3 παριστάνει την περίπτωση που το σύνολο C είναι $C = A \cup B = A + B$.

Έχουμε δηλαδή τις λυχνίες που είναι κόκκινες ή ανάβουν και μπορεί να είναι κόκκινες και να ανάβουν.

Μία άλλη περίπτωση είναι αυτή του Σχήματος 3.4.



Σχήμα 3.3



Σχήμα 3.4

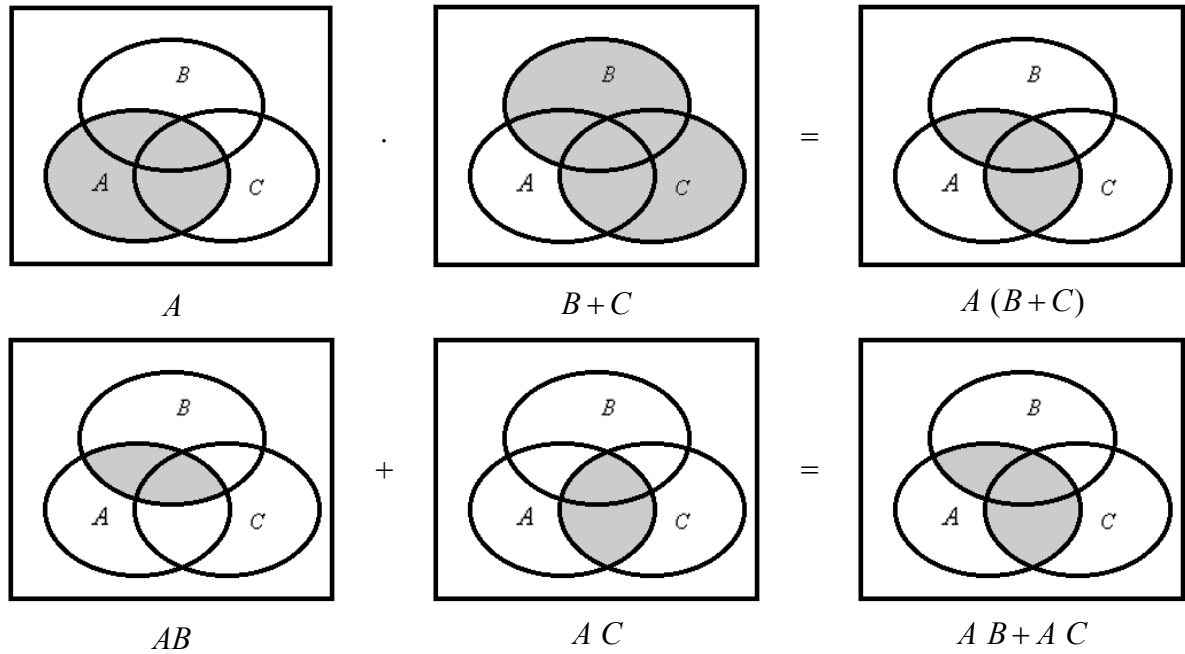
Εδώ έχουμε το γραμμοσκιασμένο μέρος, C , που παριστάνει τις λυχνίες που είναι κόκκινες ή ανάβουν αλλά δεν μπορεί να είναι κόκκινες και να ανάβουν. πρόκειται για το αποκλειστικό OR (EX-OR). $C = A \oplus B$.

Το καθολικό σύνολο είναι το $A + \bar{A}$, όμως $A + \bar{A} = 1$ άρα το καθολικό σύνολο παριστάνεται με 1.

Το 0 παριστάνει το κενό σύνολο, δηλαδή το σύνολο χωρίς στοιχεία, αφού $A\bar{A} = 0$.

Οι διάφορες ιδιότητες και θεωρήματα από την άλγεβρα του Boole αποδεικνύονται εύκολα με τα διαγράμματα του Venn. Για παράδειγμα, η επιμεριστική ιδιότητα, $A(B + C) = AB + AC$ αποδεικνύεται εύκολα από τα διαγράμματα του

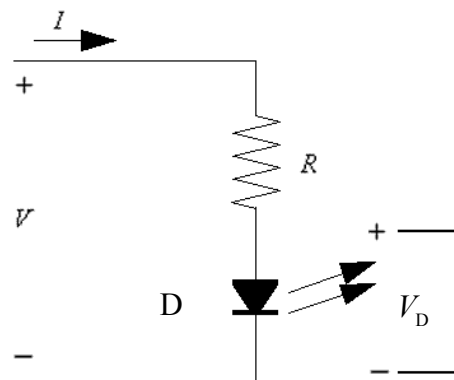
Σχήματος 3.5.



Σχήμα 3.5

ΚΥΚΛΩΜΑ ΜΕ LED (Δίοδος εκπομπής φωτός, LED, Light Emitting Diode).

Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η συνδεσμολογία της LED.



Σχήμα 3.6

Οι διάφοροι τύποι LED έχουν διάφορες τάσεις, V_0 , λειτουργίας. Ας σημειωθεί ότι η τάση V_D είναι περίπου σταθερή για ένα εύρος τιμών ρεύματος.

Οι κατασκευαστές δίνουν όρια για το ρεύμα και την τάση V_D . Η αντίσταση R λέγεται αντίσταση περιορισμού και είναι απαραίτητη για να μην καταστραφεί η δίοδος. Για κόκκινες LED το ρεύμα, dc, είναι από 5 mA μέχρι 25 mA. Για πράσινες και κίτρινες LED από 10 mA μέχρι 40 mA. Ενδεικτικές τιμές για την τάση V_D είναι, 1,8 V για κόκκινες, 2,1 V για πράσινες και 2,0 V για κίτρινες. Η V_D είναι γενικώς της τάξης των 2 V. Για να δίνουν αρκετό φως οι κόκκινες LED χρειάζονται περίπου ρεύμα 10 mA ενώ οι πράσινες και κίτρινες χρειάζονται 20 mA.

Παράδειγμα

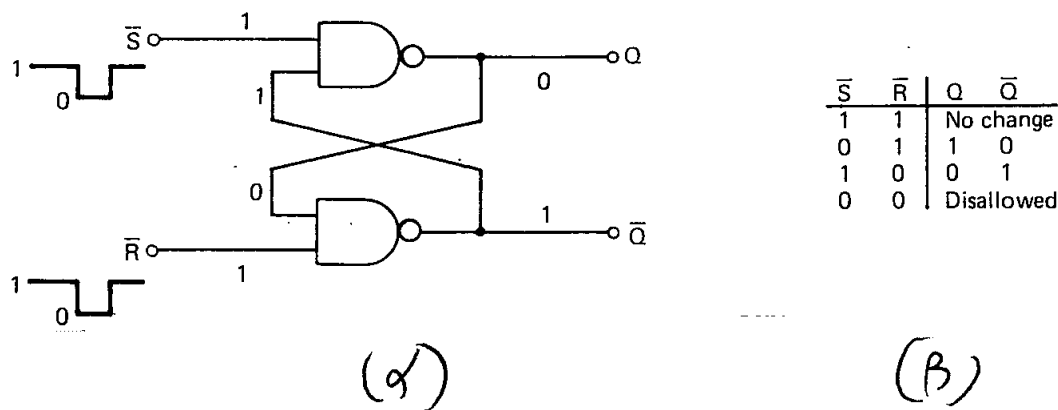
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κάποια LED που η τροφοδοσία της θα είναι $V = 5\text{ V}$ και το ρεύμα της θα είναι $I = 10\text{ mA}$. Ο κατασκευαστής δίνει $V_D = 2,2\text{ V}$.

Προφανώς ισχύει,

$$R = \frac{V - V_D}{I} \text{ άρα } R = \frac{5,0 - 2,2}{10 \cdot 10^{-3}} \Omega . \text{ Άρα } \boxed{R = 280 \Omega}$$

ΦΛΙΠ-ΦΛΟΠ S-R (SET-RESET, ΘΕΣΗΣ-ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ)

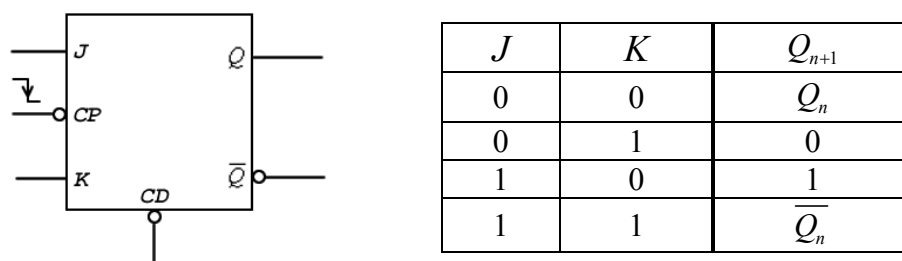
Το Φλιπ Φλοπ τύπου Set-Reset μπορεί να πραγματοποιηθεί με πύλες NAND όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Δίνεται και ο πίνακας αλήθειας του Φλιπ-Φλοπ.



Σχήμα 3.7

ΦΛΙΠ ΦΛΟΠ JK

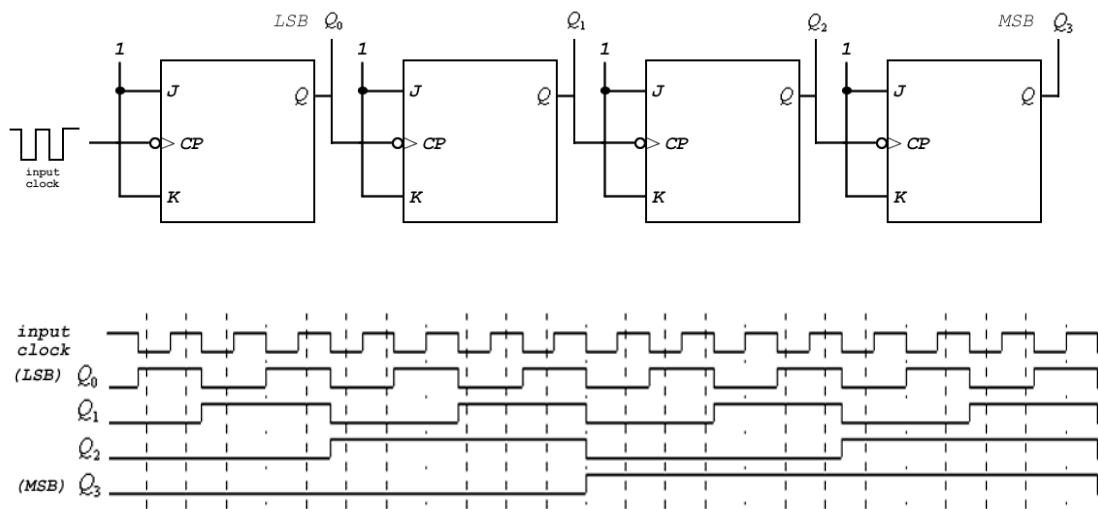
Το σύμβολο του φλιπ – φλοπ JK φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Το φλιπ – φλοπ JK έχει δύο εισόδους δεδομένων τις J, K . Ο πίνακας αλήθειας του φλιπ – φλόπ JK φαίνεται επίσης στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8

Ο πίνακας σημαίνει ότι αν οι εισόδους J, K είναι συμπληρωματικές, η έξοδος Q θα οδηγηθεί στην τιμή της εισόδου J στον επόμενο παλμό του ρολογιού (το ρολόι είναι το CP). Αν τα J, K είναι και τα δύο 0, τότε η έξοδος Q δεν θα αλλάξει τιμή και θα παραμείνει όπως ήταν πριν τον παλμό του ρολογιού. Αν τα J, K είναι και τα δύο 1, η έξοδος θα αλλάξει κατάσταση, από 1 σε 0 ή από 0 σε 1, μετά τον παλμό του ρολογιού από Q_n θα γίνει \bar{Q}_n . Το φλιπ – φλόπ μπορεί να έχει και άλλους ακροδέκτες όπως ο ακροδέκτης CD (Reset, Clear, επαναφορά, καθάρισμα). Για να ισχύουν τα ανωτέρω,

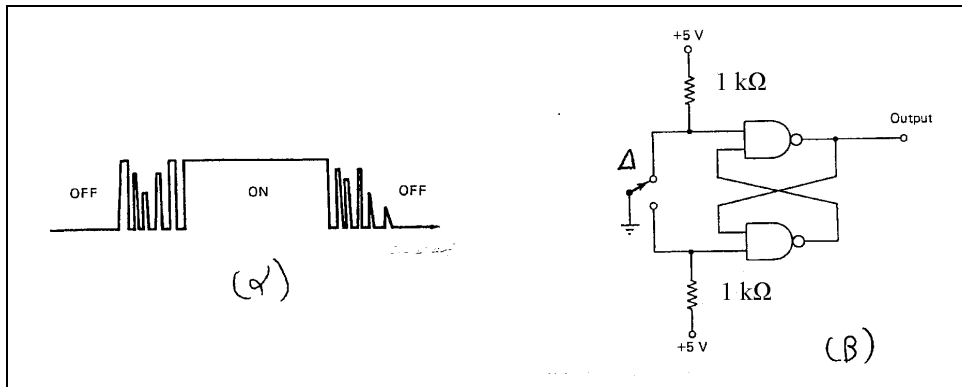
για το φλιπ – φλοπ, που αναφερόμαστε στο σχήμα, πρέπει το CD να είναι 1. Αν είναι 0 τότε ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στα J, K οι έξοδοι είναι $Q = 0$ και $\bar{Q} = 1$. Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται ένας απαριθμητής κατασκευασμένος με φλιπ – φλόπ JK των 4 ψηφίων (bit), που μετρά από το 0 μέχρι το 15 ($= 2^4 - 1$).



Σχήμα 3.9

ΚΥΚΛΩΜΑ DEBOUNCER

Όταν χρησιμοποιούμε κάποιο μηχανικό διακόπτη όπως στο Σχήμα 3.10 α, παρουσιάζεται το φαινόμενο της αναπήδησης του διακόπτη κατά τη διάρκεια της επαφής. Το Σχήμα 3.10 β είναι ενδεικτικό. Όταν αρχίζει η διακοπή της πάνω επαφής ενώ η κατάσταση ήταν OFF (τάση στην είσοδο ίση με μηδέν), γίνεται ON. Επειδή όμως ο διακόπτης αναπηδά, κάνει πολλές φορές επαφή και διακοπή (το φαινόμενο μπορεί να διαρκεί επί πολλά μικροδευτερόλεπτα ή μιλιδευτερόλεπτα). Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.10 β. Ανάλογα συμβαίνουν όταν γίνεται η κάτω επαφή όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Το κύκλωμα του Σχήματος 3.10 α, με Φλιπ-Φλοπ S-R, εξαλείφει αυτό το φαινόμενο με την έννοια ότι η έξοδος του, από τη μια κατάσταση πηγαίνει στην άλλη χωρίς να παρακολουθεί τις αναπηδήσεις του διακόπτη. Αυτό γίνεται φανερό διότι η έξοδος δεν μεταβάλλεται όταν και οι δυο εισοδοί \bar{S} και \bar{R} γίνονται μηδέν (δηλαδή ο διακόπτης είναι μεταξύ των δυο επαφών χωρίς να ακουμπά πουθενά, πράγμα που συμβαίνει κατά τις αναπηδήσεις), βλ. Σχ. 3.7. Έτσι παραμένει η έξοδος 0 ή 1 όπως ήταν πριν την πρώτη αναπήδηση.



Σχήμα 3.10

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ένας δεκαδικός αριθμός (αριθμός με βάση το 10) έχει την αναπαράσταση:

$$(X_4 X_3 X_2 X_1 X_0)_{10} \quad \text{όπου} \quad 0 \leq X_i \leq 9$$

Ο αριθμός κατά τα γνωστά ισούται με

$$X_4 \times 10^4 + X_3 \times 10^3 + X_2 \times 10^2 + X_1 \times 10^1 + X_0 \times 10^0$$

Παράδειγμα

$$(324)_{10} = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 300_{10} + 20_{10} + 4_{10}$$

Ανάλογα συμβαίνουν στο Δυαδικό Σύστημα (αναπαράσταση) όπου βάση είναι το 2. Έχομε την αναπαράσταση,

$$(X_7 X_6 X_5 X_4 X_3 X_2 X_1 X_0)_2 \quad \text{όπου} \quad 0 \leq X_i \leq 1$$

Ο αριθμός είναι ίσος με,

$$X_7 \times 2^7 + X_6 \times 2^6 + X_5 \times 2^5 + X_4 \times 2^4 + X_3 \times 2^3 + X_2 \times 2^2 + X_1 \times 2^1 + X_0 \times 2^0$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (10110100)_2 &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 128_{10} + 0 + 32_{10} + 16_{10} + 0 + 4_{10} + 0 + 0 = 180_{10} \end{aligned}$$

Δεκαεξαδικό σύστημα (Hexadecimal)

Τα ψηφία του δεκαεξαδικού είναι τα ακόλουθα 16,
 $F, E, D, C, B, A, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ το καθένα διαφέρει από το άλλο κατά μια μονάδα

Παράδειγμα

Προφανώς θα έχουμε γενικώς,

$$(X_3 X_2 X_1 X_0)_{16} = X_3 \times 16^3 + X_2 \times 16^2 + X_1 \times 16^1 + X_0 \times 16^0$$

Έστω ο 16δικός

FE8C

προφανώς ισούται με $F \times 16^3 + E \times 16^2 + 8 \times 16^1 + C \times 16^0$

$$= 15 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 12 \times 16^0$$

$$= 61\,440_{10} + 3584_{10} + 128_{10} + 12_{10} = 65\,164_{10}$$

Μια σημαντική ιδιότητα της 16δικής αναπαράστασης είναι ότι μπορούν οι αριθμοί να μετατραπούν μεταξύ 16δικού και δυαδικού εύκολα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν χωριστεί ο δυαδικός σε τετράδες ψηφίων τότε κατά τη μετατροπή η κάθε τετράδα μετατρέπεται σε ένα ψηφίο του 16δικού. Δεν χρειάζονται άλλα γειτονικά ψηφία για τη μετατροπή. Αυτό δεν συμβαίνει αν έχουμε 16δικό και δεκαδικό ή δυαδικό και δεκαδικό.

Πράγματι έχουμε για το ανωτέρω παράδειγμα,

$$\begin{array}{cccc} F & E & 8 & C \\ 1111 & 1110 & 1000 & 1100 \end{array}$$

Υπάρχουν και άλλα χρήσιμα συστήματα όπως το οκταδικό με βάση το 8.

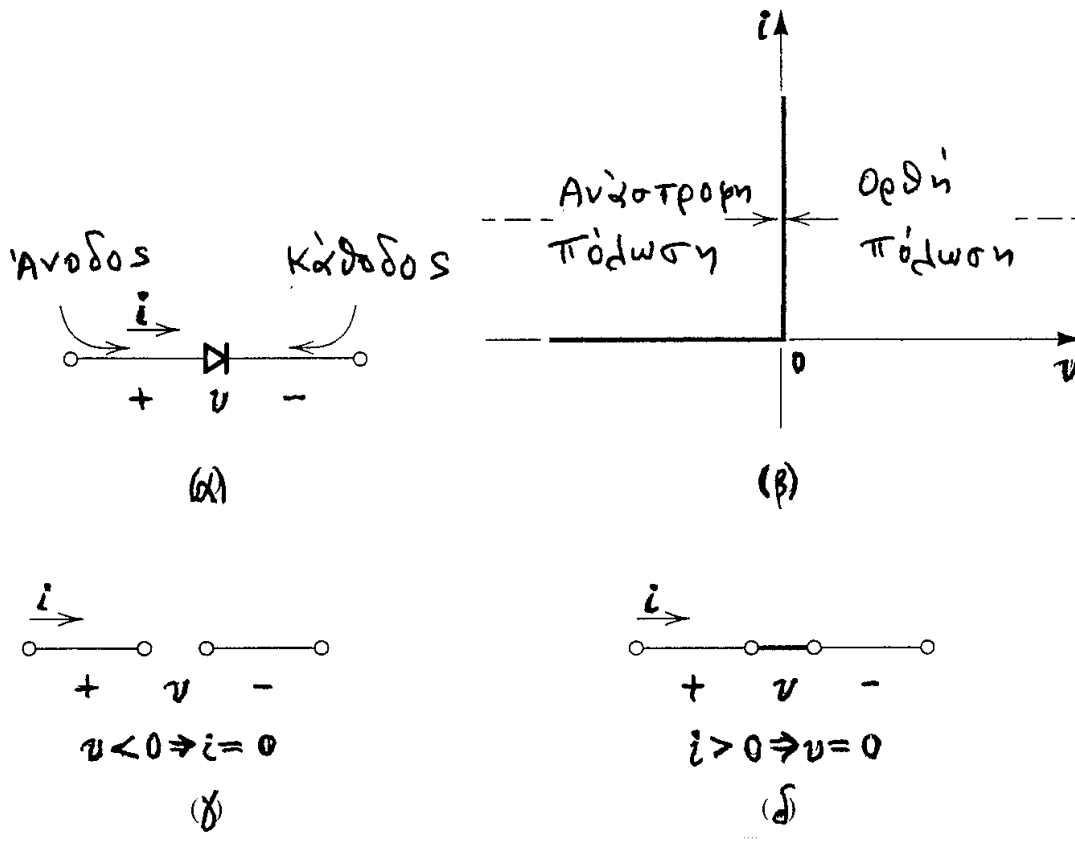
Πίνακας αντιστοιχιών			
Δεκαεξαδικό	Δεκαδικό	Οκταδικό	Δυαδικό
0	0	00	0000
1	1	01	0001
2	2	02	0010
3	3	03	0011
4	4	04	0100
5	5	05	0101
6	6	06	0110
7	7	07	0111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
A	10	12	1010
B	11	13	1011
C	12	14	1100
D	13	15	1101
E	14	16	1110
F	15	17	1111

4. ΒΑΣΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΙΣΧΥΤΩΝ ΜΕ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ

ΔΙΟΔΟΣ – ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ

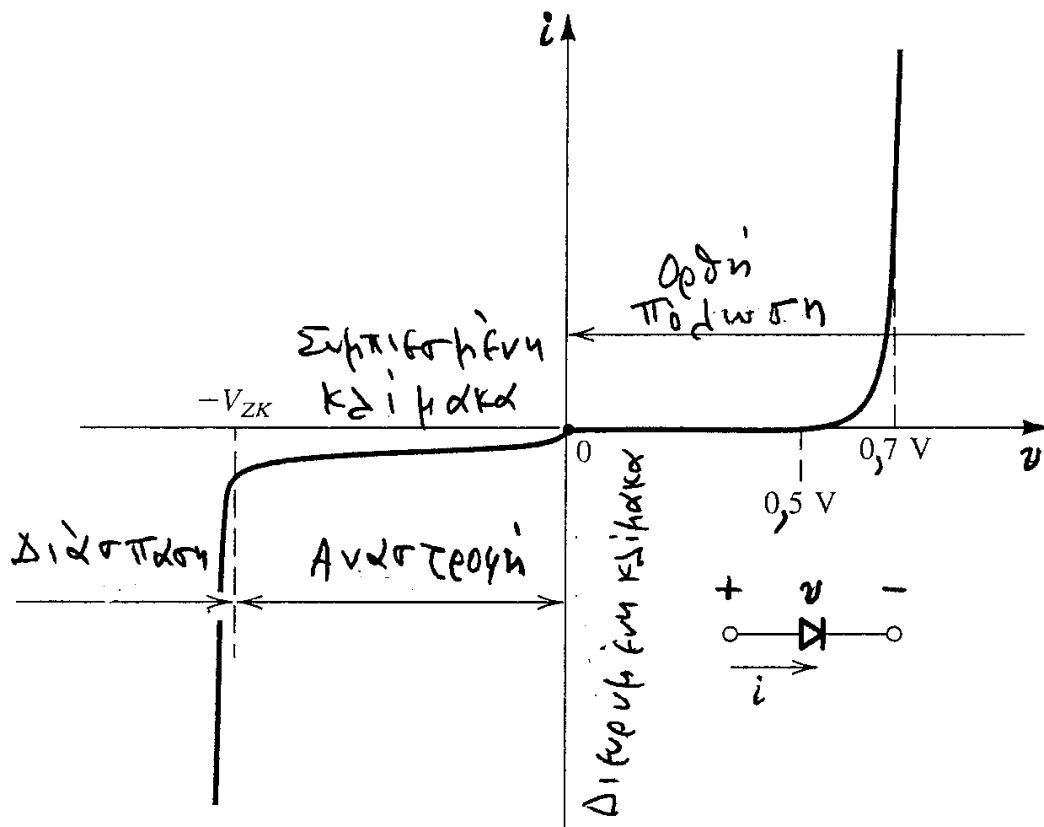
- Δίοδος

Η δίοδος είναι το απλούστερο μη γραμμικό στοιχείο κυκλώματος, βλ. Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1

Αποτελείται συνήθως από υλικό Si (πυρίτιο) στο οποίο με κατάλληλες προσμίξεις δημιουργούνται δύο μέρη, το ένα με θετικούς φορείς ρεύματος (οπές, υλικό p, positive) και το άλλο με αρνητικούς φορείς ρεύματος (ηλεκτρόνια, υλικό n, negative). Τα δύο μέρη βρίσκονται σε πολύ στενή επαφή (διεπαφή, ένωση, junction). Το χρήσιμο από ηλεκτρολογικής πλευράς είναι ότι το ρεύμα μπορεί (ουσιαστικά) να διέρχεται από τη διάταξη μόνο προς την μία κατεύθυνση, βλ. τη χαρακτηριστική της δίοδου στο Σχήμα 4.1β. Η πραγματική χαρακτηριστική είναι όπως αυτή του Σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2

Η περιοχή ορθής πόλωσης χαρακτηρίζεται από $v > 0$. Η σχέση $i = I_s [\exp(\frac{v}{n \frac{kT}{e}}) - 1]$

($V_T = \frac{kT}{e}$) είναι μία καλή προσέγγιση για την ορθή πόλωση.

Το n εξαρτάται από το υλικό και τη φυσική κατασκευή της διόδου, $2 > n > 1$. Το n είναι περίπου 2 για το Si και για μικρά ρεύματα. Για μεγαλύτερα ρεύματα είναι περίπου 1. Για διόδους από υλικό Ge (γερμάνιο) είναι περίπου 1.

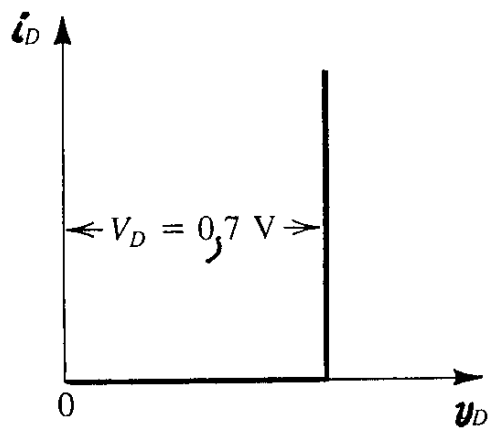
Το I_s είναι το ρεύμα κόρου και είναι μία σταθερά για δεδομένη δίοδο και θερμοκρασία.

k είναι η σταθερά του Boltzman και ισχύει $k = 8,62 \times 10^{-5}$ eV/K. Η θερμοκρασία δωματίου θεωρείται συνήθως ότι είναι $T \approx 300$ K. Ακριβέστερα, αν η θερμοκρασία δωματίου ληφθεί να είναι 20°C τότε αυτή αντιστοιχεί σε 293 K. Για μεγάλο ρεύμα i

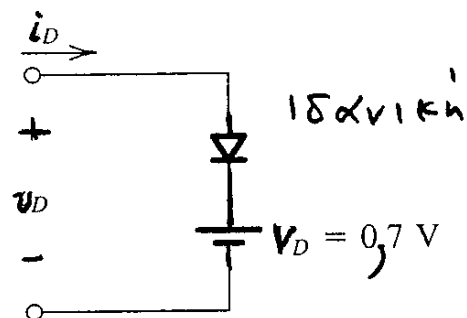
(ορθή πόλωση) έχουμε $i \gg I_s$ άρα $i \approx I_s e^{v/nV_T}$ ή $v = nV_T \ln \frac{i}{I_s}$.

Στους 20°C , $V_T = 25,2$ mV ≈ 25 mV.

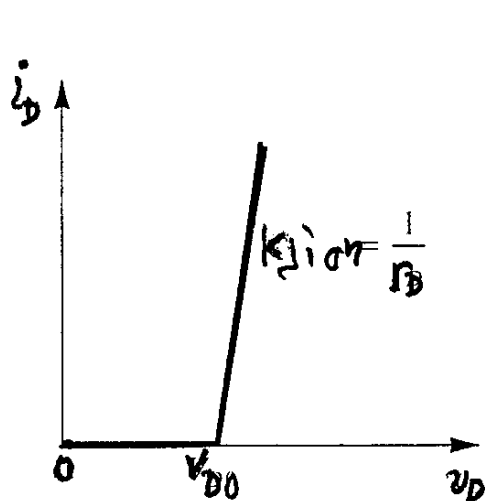
Χρησιμοποιούνται διάφορες προσεγγιστικές χαρακτηριστικές όπως αυτές στο Σχήμα 4.3.



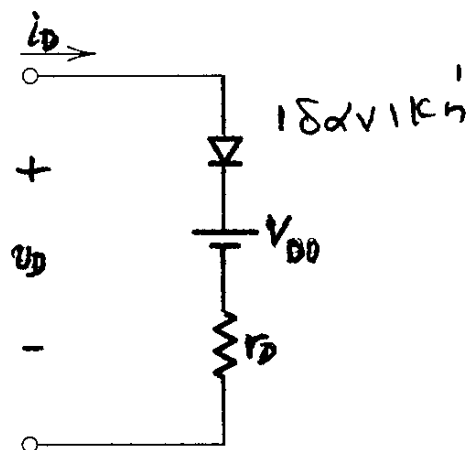
(α)



(β)



(γ)

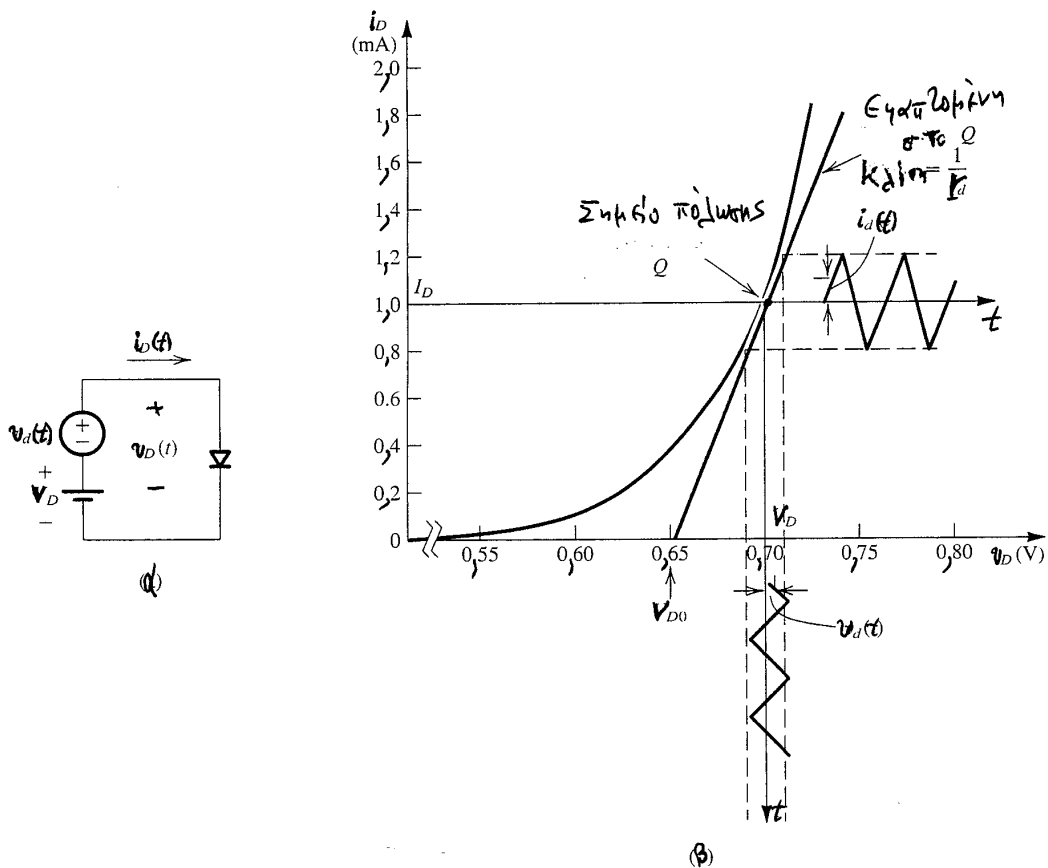


Σχήμα 4.3

Για πυρίτιο $V_D \approx 0,7 \text{ V}$, για γερμάνιο $V_D \approx 0,3 \text{ V}$.

Για πυρίτιο $V_{D0} \approx 0,6 \text{ V}$, για γερμάνιο $V_{D0} \approx 0,2 \text{ V}$.

- Η δίοδος για μικρά (ασθενή) σήματα.



Σχήμα 4.4

Στο Σχήμα 4.4 το σημείο Q (quiescent) είναι το σημείο ηρεμίας (πόλωσης) και έχουμε τις συνεχείς συνιστώσες V_D, I_D . Έστω ότι έχουμε επιπρόσθετα το ρεύμα και τάση i_d, v_d , αρκούντως μικρά (σήματα), που γενικώς είναι συναρτήσεις του χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στη γραμμική περιοχή γύρω από τα V_D, I_D . Έχουμε

$$i(t) = I_D + i_d(t), \quad v(t) = V_D + v_d(t)$$

$$\text{Ισχύει: } i = I_S \left[\exp\left(\frac{v}{nV_T}\right) - 1 \right].$$

Για μικρές μεταβολές του i έχουμε

$$\Delta i = \frac{I_S}{nV_T} \exp\left(\frac{V_D}{nV_T}\right) \Delta v. \text{ Αν } \exp\left(\frac{V_D}{nV_T}\right) \gg 1 \text{ (αυτό ισχύει για } V_D \approx \text{μερικά mV), τότε}$$

$$I_D \approx I_S \exp\left(\frac{V_D}{nV_T}\right) \text{ (σημείο ηρεμίας, Q).}$$

$$\text{Άρα } \Delta i = \frac{I_D}{nV_T} \Delta v.$$

$$\text{Αν } \begin{matrix} i_d = \Delta i \\ v_d = \Delta v \end{matrix} \rightarrow i_d(t) = \frac{I_D}{nV_T} v_d(t) \text{ η κλίση } \left. \frac{\Delta i}{\Delta v} \right|_{V_D, I_D, (Q)} = \frac{di}{dv} = \frac{1}{r_d} \text{ ή } r_d = \frac{nV_T}{I_D}$$

Μια εμπειρική σχέση με $n = 1$ (σχετικά μεγάλο ρεύμα, I_D) και θερμοκρασία δωματίου 20°C , είναι η εξής,

$$r_d = \frac{25}{I_D} \text{ (το } r_d \text{ σε } \Omega \text{ και το } I_D \text{ σε mA)}$$

Κανονικά πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η αντίσταση του υλικού που είναι συγκρίσιμη, για μεγάλα ρεύματα, με την r_d .

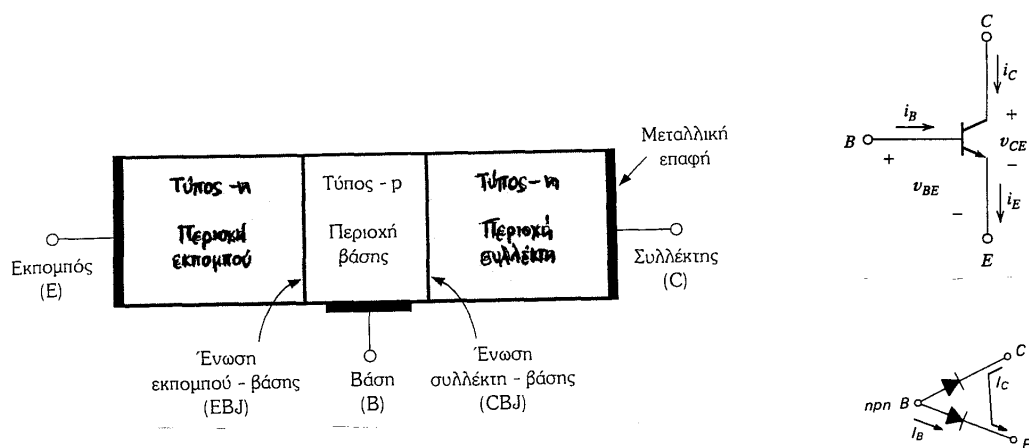
ΔΙΠΟΛΙΚΟ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ ΔΙΕΠΑΦΗΣ (ΕΝΩΣΗΣ) (Bipolar Junction Transistor, BJT)

Η λέξη transistor προέρχεται από τις λέξεις transfer resistor. Το bipolar (διπολικό) προέρχεται από το γεγονός ότι οι φορείς ρεύματος είναι και αρνητικοί (ηλεκτρόνια) και θετικοί (οπές).

Το τρανζίστορ είναι το πιο θεμελιώδες στοιχείο των ηλεκτρονικών. Χρησιμοποιείται ως ενισχυτής, ως διακόπτης κτλ.

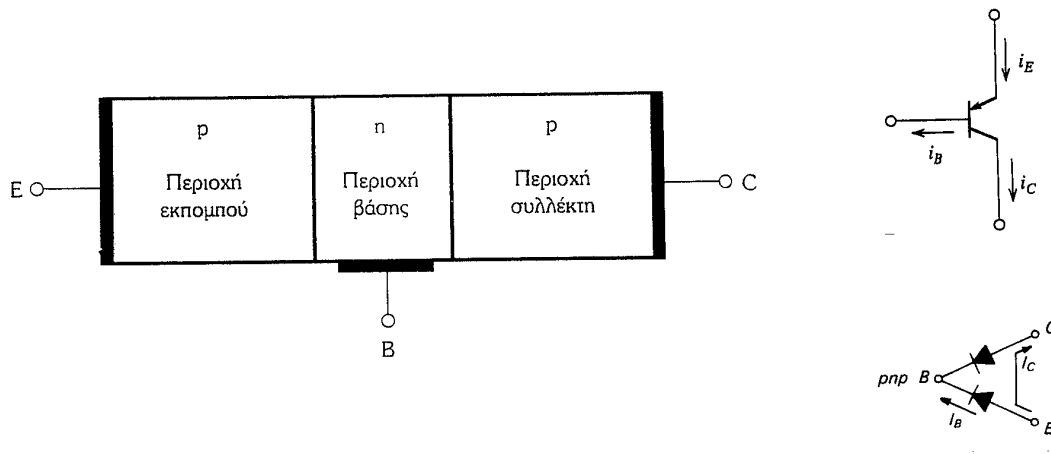
Είναι σαν να αποτελείται από δύο διόδους διεπαφής, pn, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.5 και 4.6.

Τρανζίστορ npn



Σχήμα 4.5

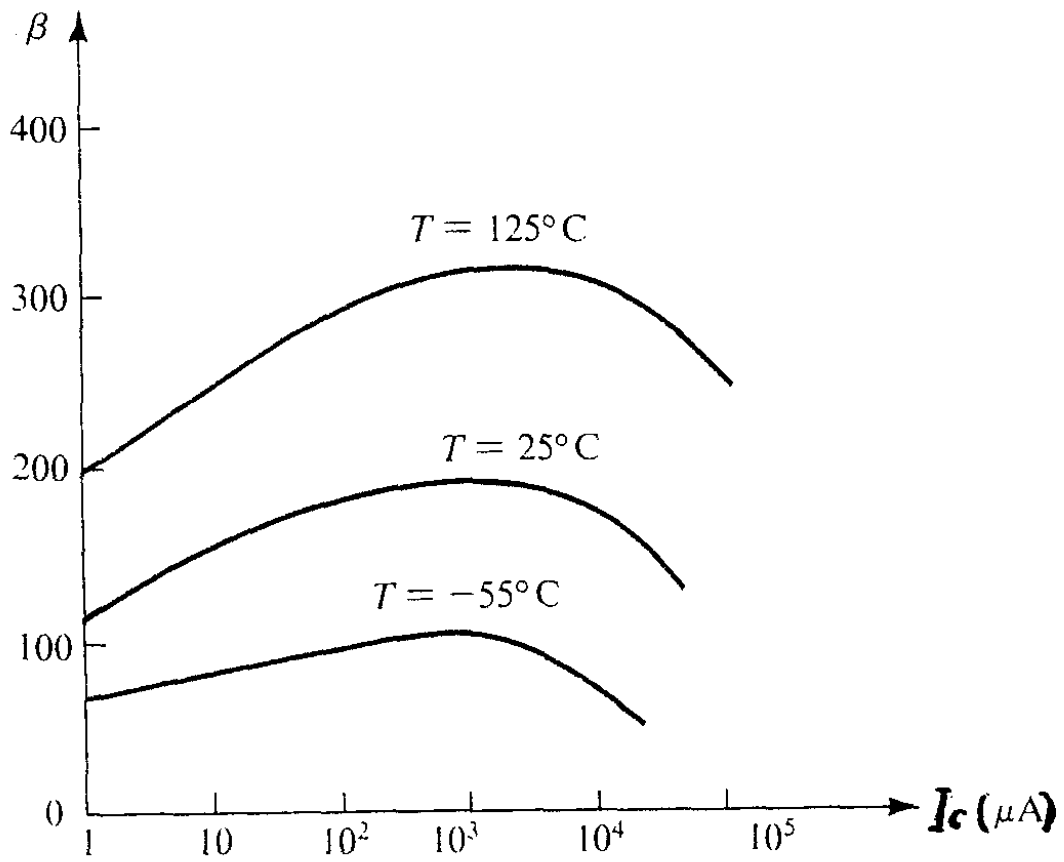
Τρανζίστορ pnp:



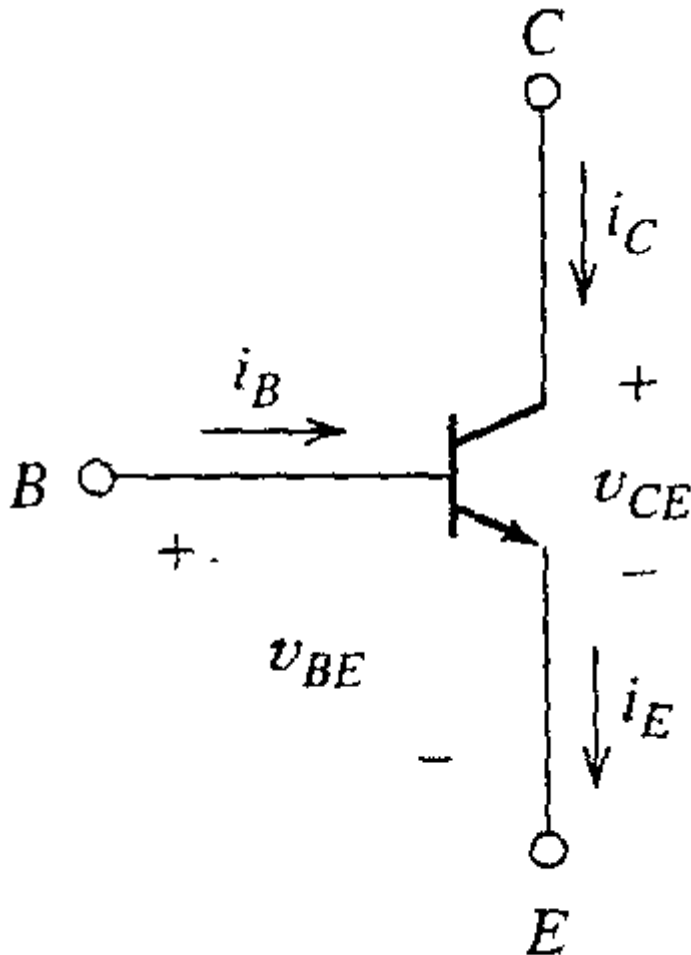
Σχήμα 4.6

Στη λεγόμενη κανονική λειτουργία, όπου το τρανζίστορ λειτουργεί ως ενισχυτής στη γραμμική περιοχή του, έχουμε ότι το ρεύμα βάσης i_B και το ρεύμα συλλέκτη συνδέονται με τη σχέση, $i_B = \frac{i_C}{\beta}$.

Το β εξαρτάται από τα κατασκευαστικά στοιχεία του τρανζίστορ και κυμαίνεται συνήθως, μεταξύ 100 και 200. Για ειδικά τρανζίστορ μπορεί να έχει τιμές της τάξης του 1000. Το β λέγεται ενίσχυση ρεύματος κοινού εκπομπού. Το β εξαρτάται από την θερμοκρασία και το ρεύμα του συλλέκτη, Σχήμα 4.7, και μπορεί να μεταβάλλεται αρκετά από κομμάτι σε κομμάτι για τον ίδιο τύπο τρανζίστορ. Για αυτό το λόγο δεν θεωρείται καλή (καθορισμένη) παράμετρος και κατά το σχεδιασμό κυκλωμάτων γίνεται προσπάθεια να μην υπάρχει σημαντική εξάρτηση των επιδόσεων του κυκλώματος από το β .



Σχήμα 4.7



Σχήμα 4.8

Από το Σχήμα 4.8 προκύπτει ότι $i_E = i_C + i_B$. Άρα αφού $i_B = \frac{i_C}{\beta}$, έχουμε $i_E = \frac{\beta+1}{\beta} i_C$.

Εισάγουμε την παράμετρο α που ορίζεται ως $i_C = \alpha i_E$, οπότε $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$ και

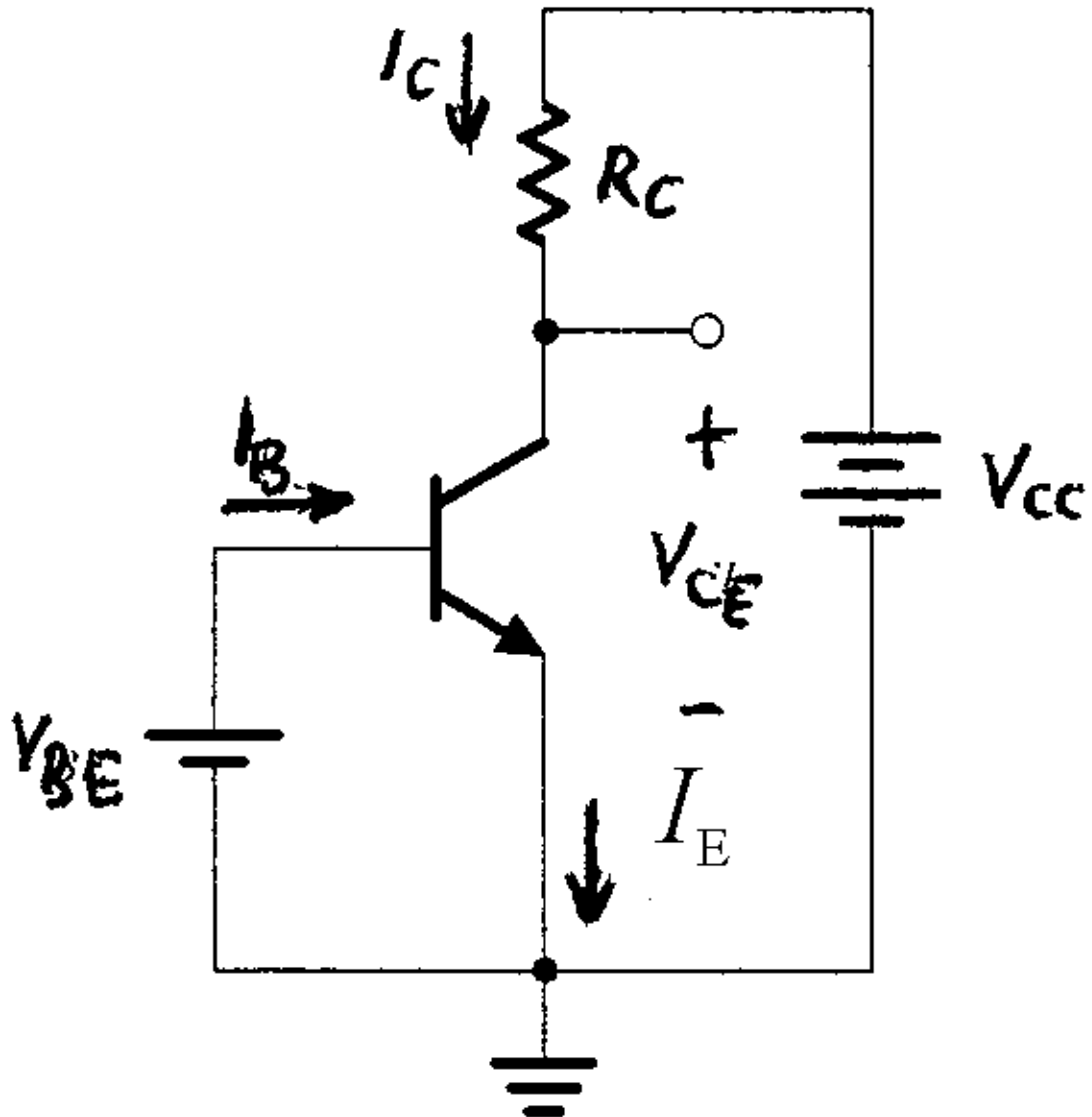
$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Ισχύει ότι $\alpha < 1$ αλλά στη πράξη $\alpha \approx 1$. Για $\beta = 100$ έχουμε $\alpha \approx 0,99$. Το α λέγεται ενίσχυση ρεύματος κοινής βάσης.

- Συμβολισμός

1. Φυσικά μεγέθη με μικρά (πεζά) γράμματα και με δείκτες κεφαλαία παριστάνουν ολικά στιγμιαία μεγέθη (γενικώς, εξαρτώμενα από το χρόνο).
π.χ. v_{BC} είναι η ολική στιγμιαία τάση μεταξύ βάσης και συλλέκτη.
2. Μέγεθος που παριστάνεται με κεφαλαίο και έχει δείκτες κεφαλαία, είναι συνεχές (dc) μέγεθος. π.χ. V_{BC} είναι η συνεχής συνιστώσα τάσης μεταξύ βάσης -εκπομπού.
3. Μέγεθος με μικρό γράμμα και δείκτες μικρά γράμματα είναι χρονικά μεταβαλλόμενη συνιστώσα (συνήθως αρμονική με το χρόνο) μικρού σχετικά μεγέθους. Πρόκειται για το «σήμα». π.χ. v_{bc} είναι το σήμα μεταξύ Βάσης - συλλέκτη.
4. Μέγεθος με κεφαλαία και δείκτες μικρά παριστάνει το πλάτος αρμονικής συνιστώσας. π.χ. V_{be} είναι το πλάτος της τάσης που είναι αρμονική με το χρόνο και εφαρμόζεται μεταξύ βάσης και εκπομπού. Το σύμβολο \hat{v} ή \hat{i} θεωρείται σήμερα πιο κατάλληλο για το πλάτος τάσης ή ρεύματος.

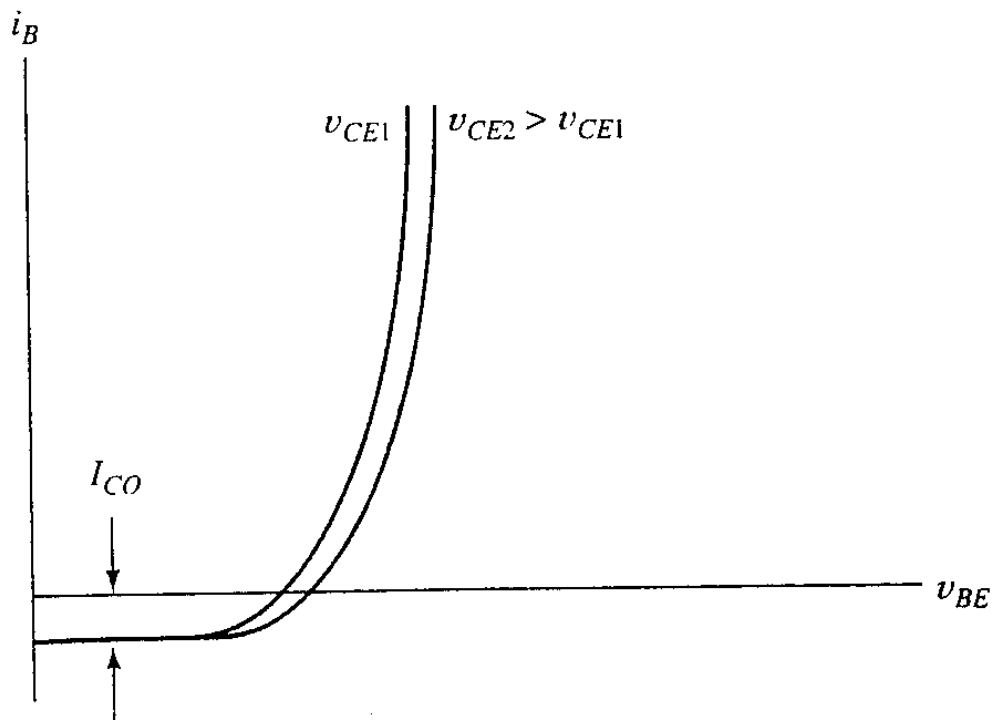
Τα σύμβολα V_{CC} , V_{BB} κλπ χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν την πηγή πόλωσης (τροφοδοσίας) που χρησιμοποιείται για το συλλέκτη και τη βάση αντίστοιχα. Σύμβολα όπως V_{BE} δηλώνουν διαφορά δυναμικού (τάση) μεταξύ B και E. Σύμβολα όπως V_C δηλώνουν την τάση του συλλέκτη ως προς κάποιο σημείο που είναι το σημείο αναφοράς με τάση μηδέν.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΟΙΝΟΥ ΕΚΠΟΜΠΟΥ ΤΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ ΒJT ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ



Σχήμα 4.9

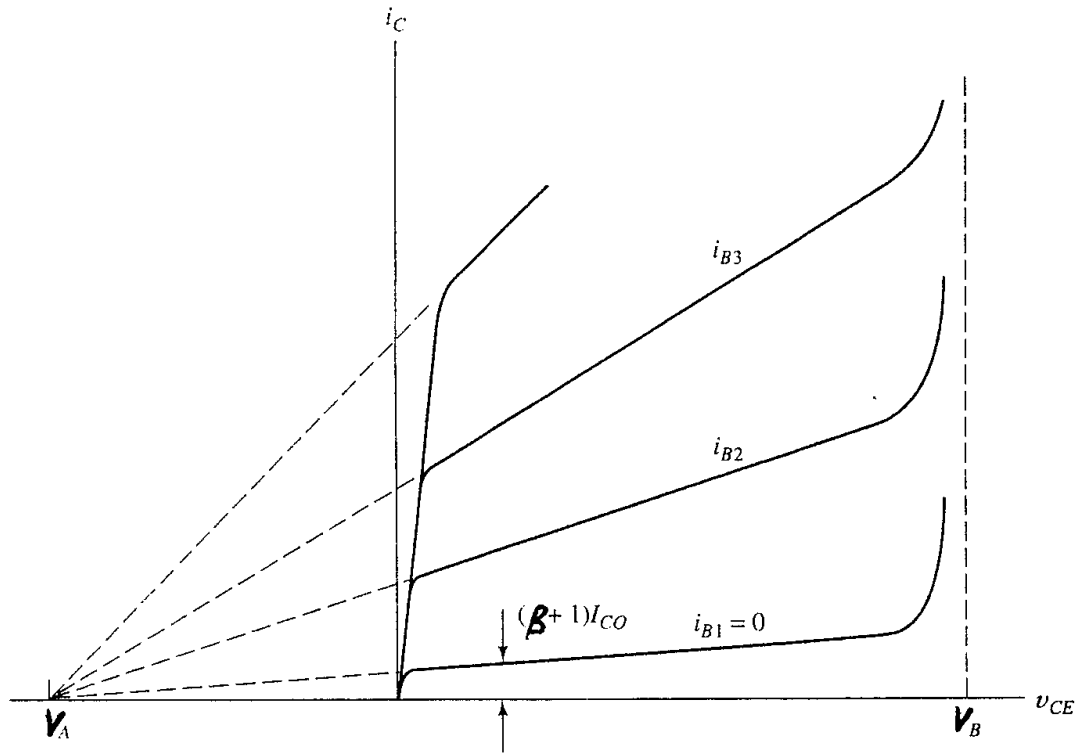
Η συνδεσμολογία φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Παρόλο που η είσοδος (βάση - εκπομπός) είναι σαν δίοδος ορθά πολωμένη η χαρακτηριστική εισόδου $i_B = i_B(v_{BE})$ δεν είναι μοναδική όπως συμβαίνει στη δίοδο, αλλά είναι οικογένεια καμπύλων σχετικά πολύ κοντά η μία στην άλλη, βλ. Σχήμα 4.10. Η παράμετρος που χαρακτηρίζει τις διαφορετικές καμπύλες είναι η τάση u_{CE} , $i_B = i_B(v_{BE}, v_{CE})$.



Σχήμα 4.10

Για μικρές τιμές του v_{BE} υπάρχει κάποιο μικρό (ανάστροφο) ρεύμα, $I_{CO} < 0$. Σε πρώτη προσέγγιση η οικογένεια καμπύλων εισόδου μπορεί να θεωρηθεί ως μία καμπύλη και το ανάστροφο ρεύμα μπορεί να θεωρηθεί μηδέν.

Οι χαρακτηριστικές εξόδου, $i_C = i_C(v_{CE}, i_B)$ στην ιδανική περίπτωση, στην περιοχή κανονικής λειτουργίας, θα ήταν οριζόντιες ευθείες. Δηλαδή το i_C θα ήταν ανεξάρτητο του v_{CE} . Στην πραγματικότητα η καμπύλες είναι όπως στο Σχήμα 4.11.

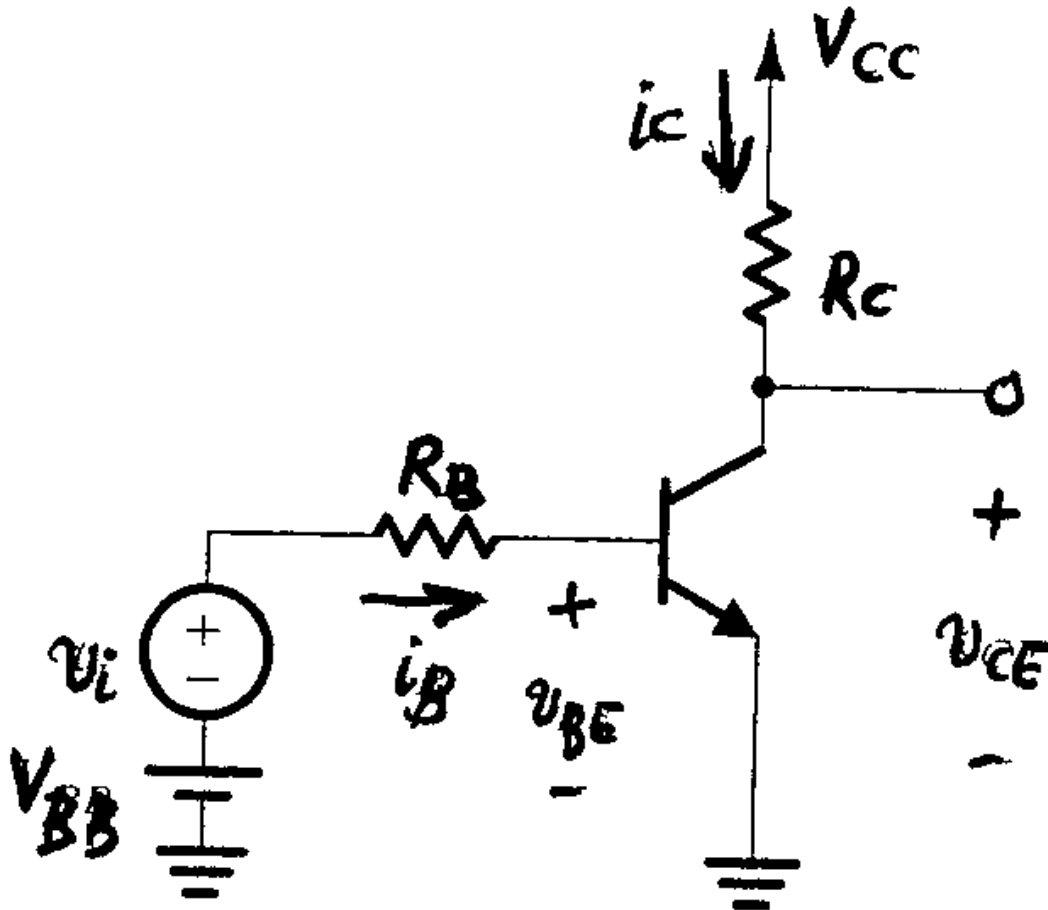


Σχήμα 4.11

Οι γραμμές στην περιοχή κανονικής λειτουργίας δεν είναι οριζόντιες ευθείες αλλά έχουν μικρή θετική κλίση.
 Το φαινόμενο αυτό λέγεται φαινόμενο του Early (early effect). Η τάση V_A λέγεται τάση early (early voltage).

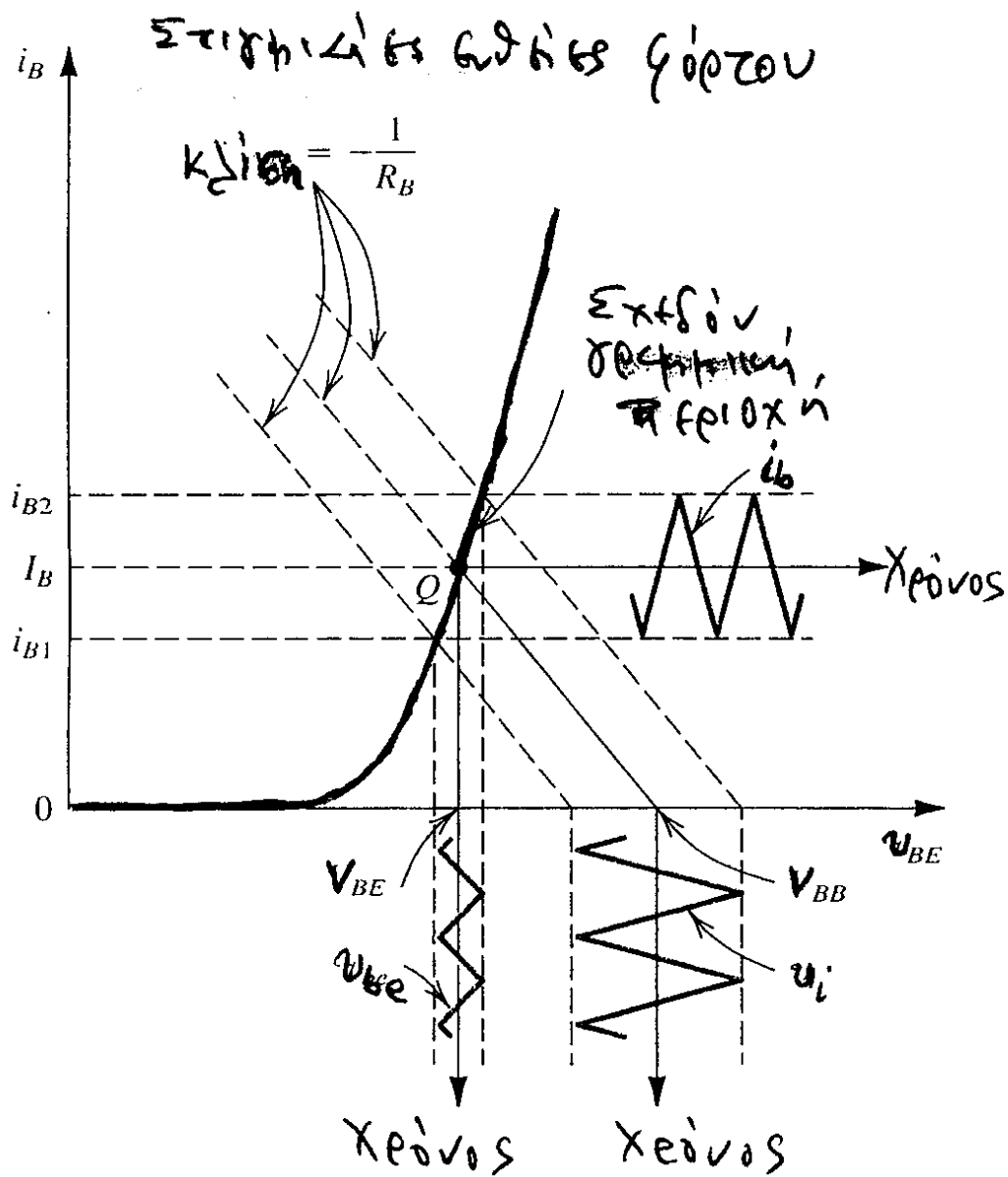
ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΗ ΚΟΙΝΟΥ ΕΚΠΟΜΠΟΥ

Η μέθοδος αυτή είναι χρήσιμη κυρίως για διδακτικούς σκοπούς. Το απλό σχετικά κύκλωμα για αυτή τη περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 4.12.



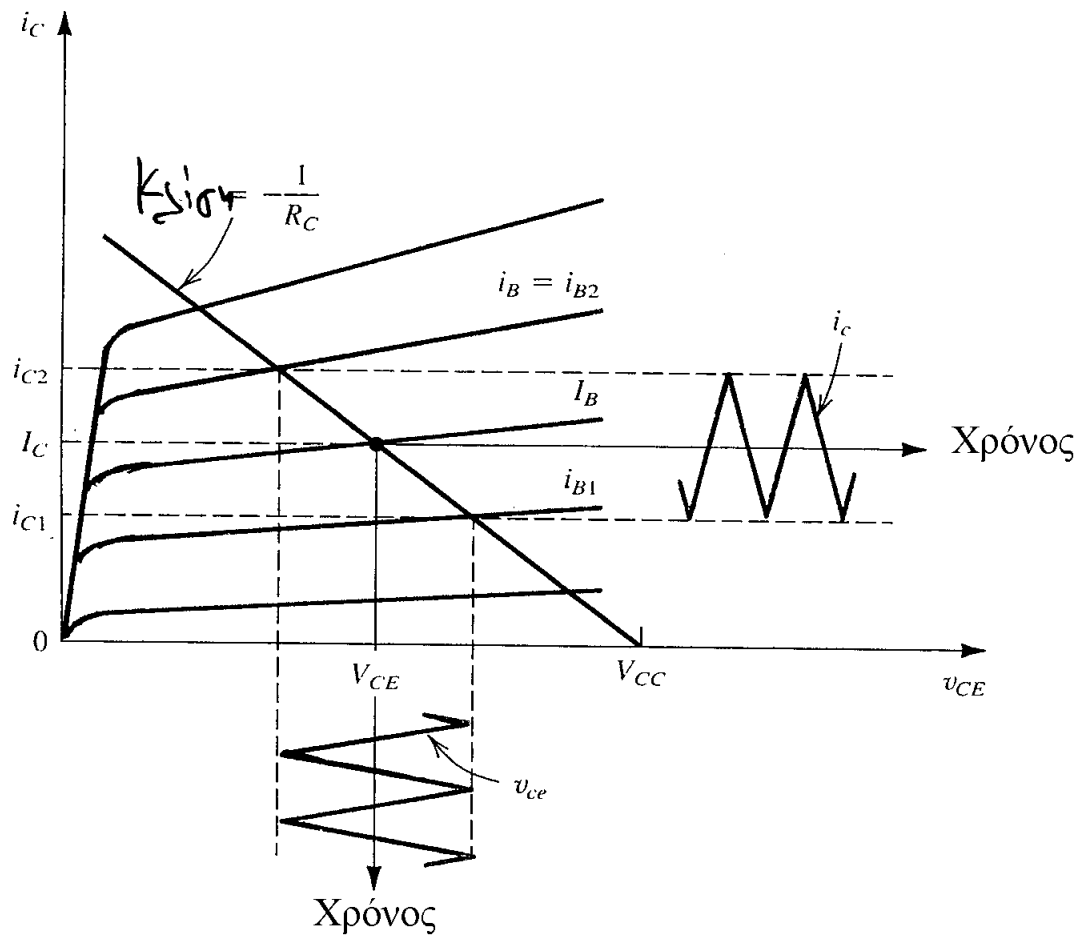
Σχήμα 4.12

v_i είναι το προς ενίσχυση σήμα και V_{CC} , V_{BB} οι συνεχείς τάσεις των πηγών (πόλωση).



Σχήμα 4. 13

Από τη χαρακτηριστική εισόδου του Σχήματος 4.13 προσδιορίζουμε το ρεύμα πόλωσης (συνεχής συνιστώσα) I_B για τάση εισόδου V_{BB} , τάση πόλωσης (σημείο Q). Στις χαρακτηριστικές εξόδου χαράσσουμε την ευθεία φόρτου, Σήμα 4.14.



Σχήμα 4.14

Από το I_B που προσδιορίστηκε προηγουμένως, βρίσκουμε για το σημείο ηρεμίας τα I_C και V_{CE} .

Στο σχήμα της χαρακτηριστικής εισόδου χαράσσουμε μίαν άλλη ευθεία φόρτου μεταβάλλοντας το V_{BB} σε $V_{BB} \pm v_i$.

Προσδιορίζουμε το αντίστοιχο ρεύμα δια μέσου της βάσης, δηλαδή το $I_B \pm i_b$, προφανώς και το i_b . Πηγαίνουμε στις χαρακτηριστικές εξόδου και βρίσκουμε το πλάτος του σήματος εξόδου v_{ce} . Προφανώς η ενίσχυση (απολαβή) τάσης της διάταξης

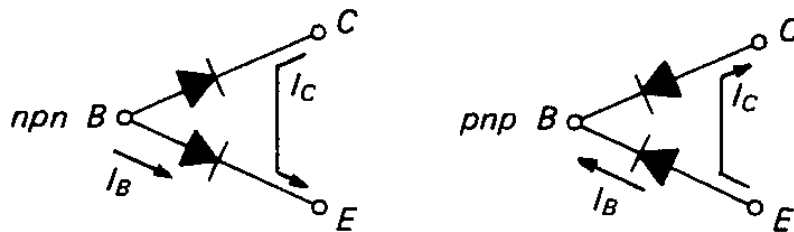
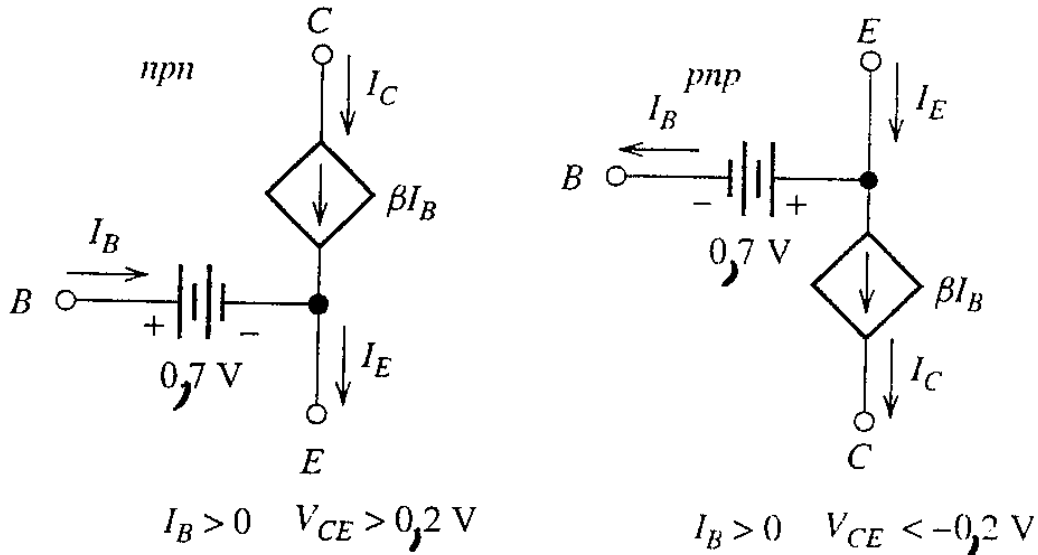
$$\text{είναι, } A = \frac{v_{CE}}{v_i}$$

Η επιλογή του σημείου ηρεμίας έχει σημασία γιατί καθορίζει το μέγιστο πλάτος του σήματος εισόδου που μπορούμε να ενισχύσουμε χωρίς να φτάνουμε στις μη γραμμικές περιοχές του τρανζίστορ.

ΤΡΟΠΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ, BJT

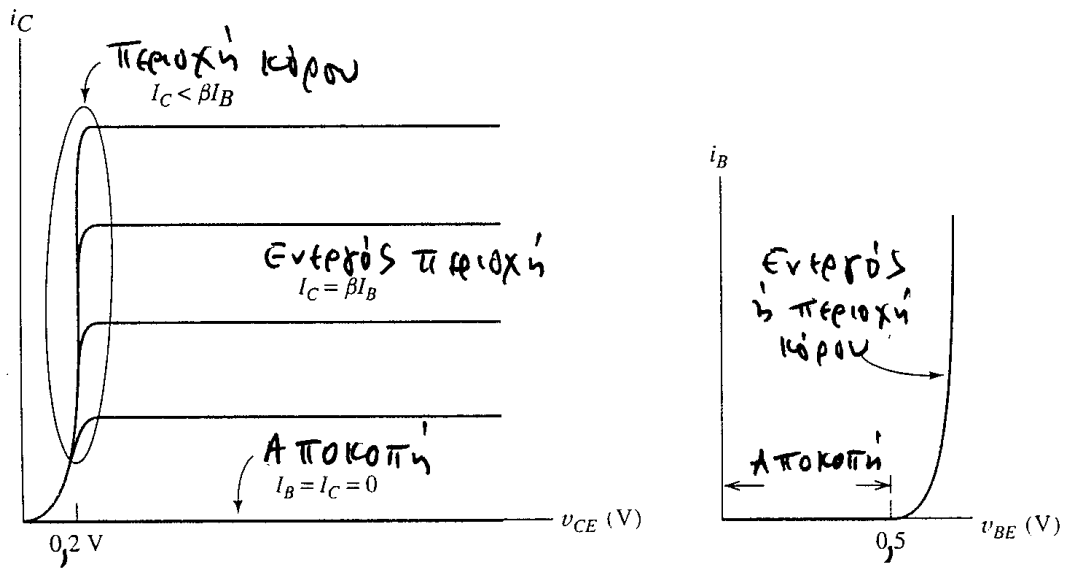
1) Ενεργός περιοχή λειτουργίας (κανονική λειτουργία).

Στο Σχήμα 4.15 φαίνεται το μοντέλο του τρανζίστορ BJT στην ενεργό περιοχή.



Σχήμα 4.15

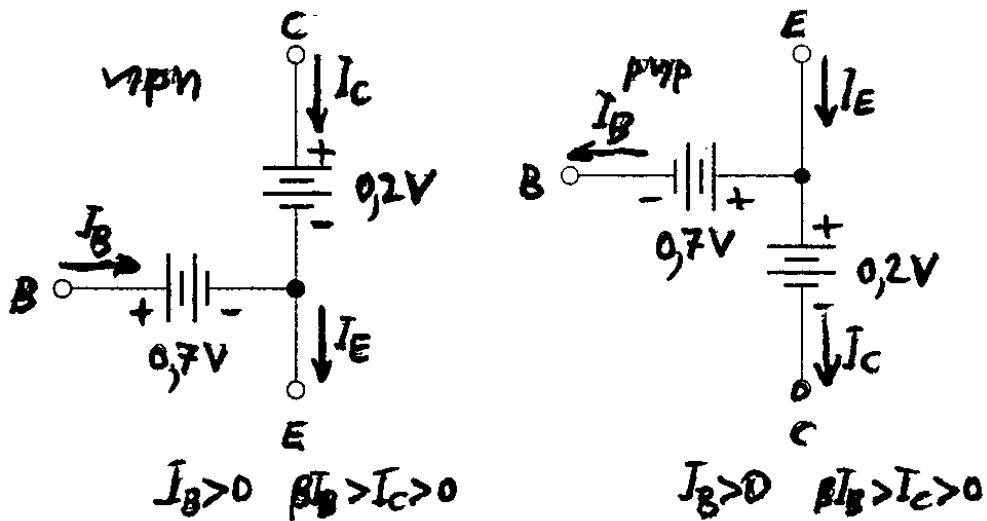
Η διεπαφή βάσης – εκπομπού (EBJ), είναι ορθά πολωμένη (άρα $V_{BE} \approx 0,7\text{V}$) ενώ η διεπαφή συλλέκτη – βάσης (CBJ) είναι ανάστροφα πολωμένη ή και κατά μερικά δέκατα του βολτ ορθά πολωμένη. Η τάση $|V_{CE}|$ πρέπει να είναι $> 0,2 \text{ V}$ ώστε να μην βρίσκεται το τρανζίστορ στα μη γραμμικά μέρη των χαρακτηριστικών του. Το Σχήμα 4.16 δείχνει τις διάφορες περιοχές (τρόπους) λειτουργίας του τρανζίστορ στο διάγραμμα των χαρακτηριστικών εισόδου και εξόδου, στη συνδεσμολογία κοινού εκπομπού.



Σχήμα 4.16

2) Περιοχή κόρου

Σε αυτή την περίπτωση και οι δύο διαπαφές, εκπομπού – βάσης και συλλέκτη – βάσης, είναι ορθά πολωμένες, βλέπε Σχήμα 4.17.



Σχήμα 4.17

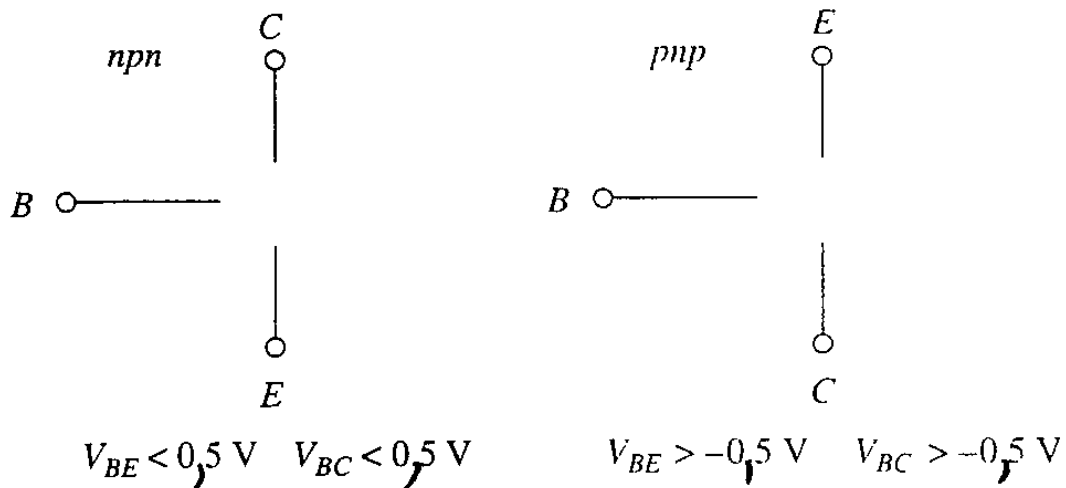
Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.16 των χαρακτηριστικών εξόδου, το $|V_{CE}| \approx 0,2 \text{ V}$. Επίσης αφού το τρανζίστορ βρίσκεται στη περιοχή κάτω από τα σημεία κάμψης (γόνατα των χαρακτηριστικών), έχουμε

$$\beta I_B > I_C > 0.$$

3) Περιοχή αποκοπής

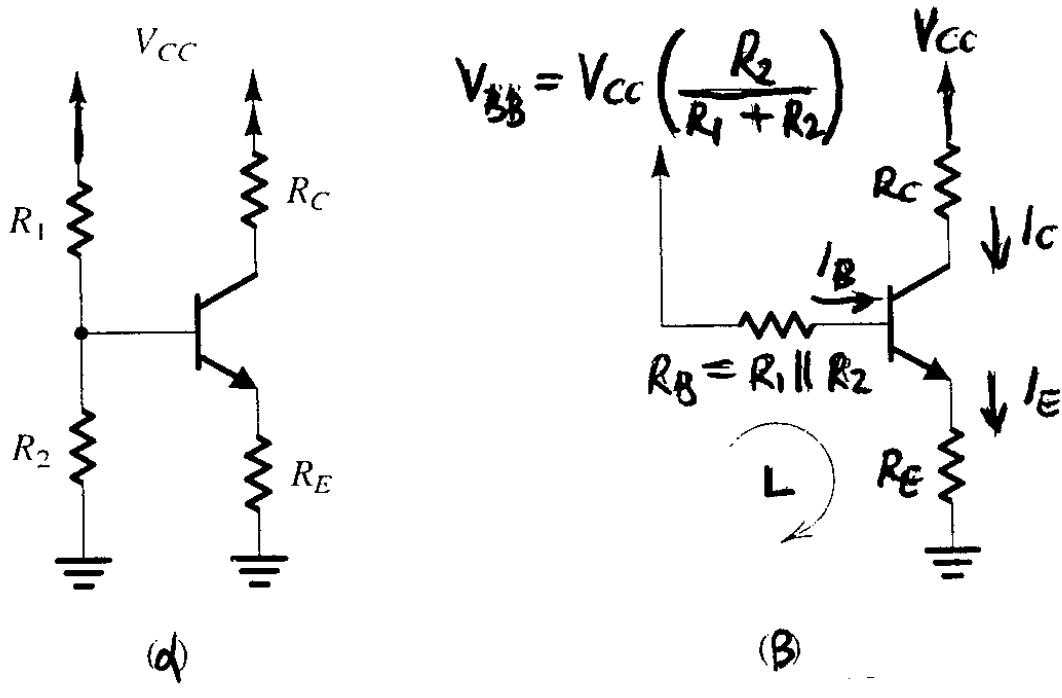
Σε αυτή την περίπτωση και οι δύο διεπαφές είναι ανάστροφα πολωμένες και δεν διέρχονται (σχεδόν καθόλου) ρεύματα από το τρανζίστορ, βλέπε Σχήμα 4.18. Στην πραγματικότητα και αν ακόμη εφαρμοστεί μικρή ορθή πόλωση, μέχρι $0,5 \text{ V}$, το τρανζίστορ εξακολουθεί να βρίσκεται σε αποκοπή.

Το μοντέλο αποτελείται από ανοιχτά κυκλώματα μεταξύ των ακροδεκτών (E, B, C).



Σχήμα 4.18

ΑΝΑΛΥΣΗ dc ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ ΒJT ΜΕ ΜΙΑ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑ



Σχήμα 4.19

Παρόλο που μπορεί να χρησιμοποιηθούν δύο τροφοδοσίες για την πόλωση (σημείο ηρεμίας) του τρανζίστορ, θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση χρήσης μίας μόνο τροφοδοσίας. Έχουμε το Σχήμα 4.19α. Υποθέτουμε ότι δεν συνδέεται τίποτα άλλο με το τρανζίστορ ή συνδέονται πυκνωτές σύζευξης για σήματα (λέγονται και πυκνωτές αποσύζευξης για dc) ώστε να μην διαταράσσεται η κατάσταση dc του κυκλώματος. Το σύστημα V_{CC}, R_1, R_2 που παρέχει τάση και ρεύμα (πόλωση) στη βάση του τρανζίστορ, μπορεί να μετατραπεί με χρήση του θεωρήματος thevenin όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.19β.

Όπου $V_{BB} = V_{CC} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ και $R_B = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Για να υπολογίσουμε το I_B

γράφουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff για το βρόχο L του κυκλώματος του Σχήματος 4.19β, οπότε έχουμε $V_{BB} = I_B R_B + V_{BE} + I_E R_E$ όμως $I_B = \frac{I_E}{\beta + 1}$ άρα

$I_E = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_E + R_B / (\beta + 1)}$. Ισχύει $I_C = \alpha I_E \approx I_E$. Για να επιτύχουμε το I_E να μην είναι

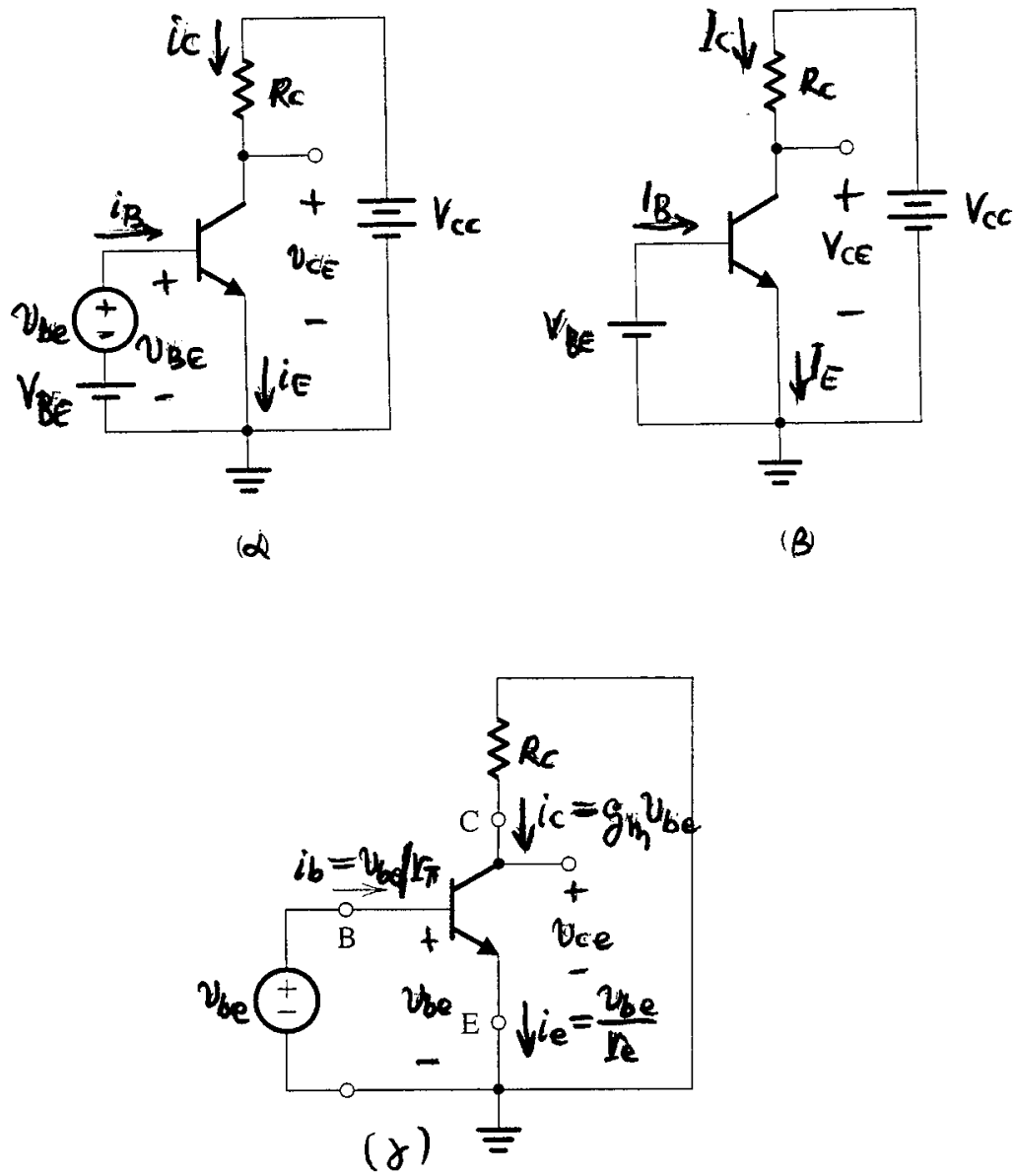
ευαίσθητο σε μεταβολές της θερμοκρασίας και στο β , που δεν είναι καλή

παράμετρος, σχεδιάζουμε το κύκλωμα έτσι ώστε, $V_{BB} \gg V_{BE}$, $R_E \gg \frac{R_B}{\beta + 1}$. Η πρώτη

συνθήκη εξασφαλίζει ότι μικρές μεταβολές του V_{BE} , γύρω από τη τυπική τιμή των 0,7 V θα επισκιαστούν από την πολύ μεγαλύτερη τάση V_{BB} . Υπάρχει όριο στο πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το V_{BB} . Συγκεκριμένα, για δεδομένο V_{CC} , όσο μεγαλύτερο είναι το V_{BB} τόσο μικρότερο θα είναι το άθροισμα της τάσης στα άκρα της R_C και της τάσης V_{CB} . Πρέπει όμως η τάση στα άκρα της R_C να είναι μεγάλη για να μπορούμε να έχουμε μεγάλη ενίσχυση τάσης και μεγάλο σήμα χωρίς να οδηγείται το σύστημα σε αποκοπή. Επίσης χρειάζεται το V_{CB} (ή το V_{CE}) να είναι μεγάλο ώστε να μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο σήμα πριν φτάσει το τρανζίστορ στον κόρο. Έχουμε δηλαδή αντικρουόμενες απαιτήσεις. Ένας χονδρικός κανόνας που ακολουθείται, στην περίπτωση ενισχυτή κοινού εκπομπού, είναι να διαλεχτεί το V_{BB} περίπου ίσο με $1/3 V_{CC}$ και το $I_C R_C$ περίπου $1/3 V_{CC}$.

Η δεύτερη συνθήκη, η οποία περιλαμβάνει το R_E , κάνει το I_E να μην είναι ευαίσθητο στις μεταβολές του β και για να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη μπορεί να διαλεχτεί το R_B να είναι μικρό. Αυτό μπορεί να γίνει διαλέγοντας τα R_1, R_2 να έχουν μικρές τιμές. Όμως μικρά R_1, R_2 σημαίνει μεγάλο ρεύμα και επίσης αυτό θα οδηγήσει σε μείωση της (ολικής) αντίστασης εισόδου του ενισχυτή. Αυτοί είναι οι περιορισμοί στην επιλογή των R_1, R_2 . Η συνθήκη αυτή σημαίνει επίσης ότι θέλουμε να κάνουμε την τάση της βάσης ανεξάρτητη του β . Έτσι η τάση της βάσης θα καθορίζεται μόνο από το διαιρέτη τάσης των R_1, R_2 (άκαμπτο κύκλωμα). Αυτό μπορεί αν επιτευχθεί αν το ρεύμα του διαιρέτη τάσης είναι πολύ μεγαλύτερο από το ρεύμα της βάσης. Συνήθως, στην πράξη, οι αντιστάτες R_1, R_2 διαλέγονται έτσι ώστε το ρεύμα τους να είναι κάτι μεταξύ $0,1 I_E$ και I_E . Μπορεί να καταλάβουμε περισσότερο πως αυτή η διάταξη πόλωσης σταθεροποιεί τη συνεχή συνιστώσα ρεύματος του εκπομπού (και άρα και του συλλέκτη), θεωρώντας τη λεγόμενη αρνητική ανασύζευξη που επιτυγχάνεται με τον αντιστάτη R_E .

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ ΒJT ΓΙΑ ΜΙΚΡΑ (ΑΣΘΕΝΗ) ΣΗΜΑΤΑ



Σχήμα 4.20

Θεωρούμε το απλοποιημένο κύκλωμα κοινού εκπομπού, Σχήμα 4.20α, όπου εμφανίζονται οι χρήσιμες ολικές στιγμιαίες τάσεις και ρεύματα. Στο Σχήμα 4.20β έχουμε μόνο τις πολώσεις (συνεχείς συνιστώσες). Στο Σχήμα 4.20γ έχουμε μόνο τα σήματα (τις εναλλασσόμενες συνιστώσες). Η παραπάνω δυνατότητα, να μπορούμε να εξετάσουμε τα διάφορα κυκλώματα του Σχήματος 4.20 χωριστά, οφείλεται στην ισχύ της αρχής της επαλληλίας για τη θεωρία κυκλωμάτων.

Έχουμε για τις συνεχείς συνιστώσες, $I_C = I_S e^{V_{BE}/V_T}$. ($V_T = kT/e$), $I_E = \frac{I_C}{\alpha}$, $I_B = \frac{I_C}{\beta}$ και $V_C = V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$. Το V_C πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το V_B ώστε

με την εφαρμογή του σήματος το τρανζίστορ να παραμένει πάντα στην ενεργό λειτουργία.

Ισχύει: $v_{BE} = V_{BE} + v_{be}$ (Σχήμα 4.20α).

Το στιγμιαίο ολικό ρεύμα θα είναι $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T} = I_S e^{(V_{BE} + v_{be})/V_T} = I_S e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T}$. Όμως $I_C = I_S e^{V_{BE}/V_T}$ άρα: $i_C = I_C e^{v_{be}/V_T}$. Αν $v_{be} \ll V_T$ (συνήθως αυτό ισχύει στην πράξη), τότε αφού $e^x \approx 1 + x$, για $|x| \ll 1$ θα έχουμε $i_C \approx I_C (1 + \frac{v_{be}}{V_T})$.

Η προσέγγιση ισχύει ικανοποιητικά για $v_{be} \leq 10$ mV και λέγεται προσέγγιση μικρού (ασθενούς) σήματος.

Επομένως, $i_C = I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be}$ ή $i_C = I_C + i_c$ όπου i_c είναι το ρεύμα σήματος του συλλέκτη και I_C η συνεχής συνιστώσα του ρεύματος του συλλέκτη, i_c είναι το ολικό στιγμιαίο ρεύμα του συλλέκτη. Έχουμε επομένως $i_c = \frac{I_C}{V_T} v_{be}$ ή $i_c = g_m v_{be}$ όπου

$$g_m = \frac{I_C}{V_T}.$$

Το g_m λέγεται διαγωγιμότητα (διαφορική διαγωγιμότητα) και συνδέει το ρεύμα σήματος του συλλέκτη με το αντίστοιχο σήμα τάσης βάσης – εκπομπού. Το V_T στους 300 K (θερμοκρασία δωματίου) είναι περίπου 25 mV. Για να είναι το g_m σταθερό πρέπει να εξασφαλιστεί ρεύμα ηρεμίας, I_C , σταθερό. Για $I_C = 1$ mA, $g_m \approx 40$ mA/V.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι $g_m = \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_{i_C = I_C}$. Δηλαδή το g_m είναι η κλίση στο σημείο

πόλωσης, Q , για $i_C = I_C$, της χαρακτηριστικής $i_C = I_C(v_{BE})$.

Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο ότι, αν $v_{be} \ll V_T$, τότε το τρανζίστορ συμπεριφέρεται (για μικρά σήματα) ως πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από τάση. Η ελέγχουσα τάση είναι η τάση βάσης – εκπομπού και το ελεγχόμενο ρεύμα είναι το ρεύμα του συλλέκτη. Η διαγωγιμότητα της ελεγχόμενης πηγής είναι η g_m και η αντίσταση εξόδου της είναι άπειρη. Το τελευταίο οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το απλό μοντέλο όπου η τάση του συλλέκτη δεν επηρεάζει το ρεύμα του συλλέκτη στην ενεργό περιοχή λειτουργίας. Αν δεχτούμε ότι υπάρχει τέτοια

επιρροή (φαινόμενο early), τότε $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T} (1 + \frac{v_{CE}}{V_A})$. Η αντίσταση εξόδου r_0 θα

δίνεται από το αντίστροφο της κλίσης της $i_C = I_C(v_{CE}, v_{BE})$ για $v_{BE} =$ σταθερό, (στα ευθύγραμμα τμήματα των χαρακτηριστικών που αντιστοιχούν στην ενεργό περιοχή),

$$r_0 = \left\{ \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_{v_{BE} = \text{σταθ} = V_{BE}} \right\}^{-1}. \text{ Άρα εύκολα βρίσκουμε ότι } r_0 = \frac{V_A}{I_C}, I_C = \text{το ρεύμα για}$$

$v_{BE} = V_{BE}$, κοντά στο σύνορο της ενεργού περιοχής προς την περιοχή κόρου.

- Υπολογισμός της αντίστασης που βλέπει η εφαρμοζόμενη τάση, u_{be} , μεταξύ βάσης και εκπομπού, μέσα στη βάση.

Υπολογίζουμε το ολικό ρεύμα βάσης i_B από τις σχέσεις $i_B = \frac{i_C}{\beta}$, $i_C \approx I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be}$ άρα

$i_B = \frac{I_C}{\beta} + \frac{1}{\beta} \frac{I_C}{V_T} v_{be}$ άρα $i_B = I_B + i_b$ όπου $I_B = \frac{I_C}{\beta}$ είναι η συνεχής συνιστώσα, ενώ η

συνιστώσα του σήματος, i_b , δίνεται από τη σχέση $i_b = \frac{1}{\beta} \frac{I_C}{V_T} v_{be}$.

Αφού $\frac{I_C}{V_T} = g_m$, προκύπτει ότι $i_b = \frac{g_m}{\beta} v_{be}$.

Η αντίσταση, r_π μέσα στη βάση για μικρά σήματα, πρόκειται για διαφορική αντίσταση, λέμε ότι είναι η αντίσταση μεταξύ βάσης και εκπομπού, κοιτάζοντας μέσα στη βάση και ορίζεται από τη σχέση, $r_\pi = \frac{v_{be}}{i_b}$.

Άρα $r_\pi = \frac{\beta}{g_m}$, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $g_m = \frac{I_C}{V_T}$ και $I_B = \frac{I_C}{\beta}$ οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$r_\pi = \frac{V_T}{I_B} = \frac{\beta V_T}{I_C}$$

Για το ολικό ρεύμα του εκπομπού έχουμε, $i_E = \frac{i_C}{\alpha} = \frac{I_C}{\alpha} + \frac{i_c}{\alpha}$ άρα $i_E = I_E + i_e$ όπου

$I_E = \frac{I_C}{\alpha}$ και το ρεύμα σήματος είναι $i_e = \frac{i_c}{\alpha} = \frac{I_C}{\alpha V_T} v_{be} = \frac{I_E}{V_T} v_{be}$.

Αν ορίσουμε τη λεγόμενη αντίσταση μικρού σήματος (διαφορική) κοιτάζοντας μέσα στον εκπομπό ως $r_e = \frac{v_{be}}{i_e}$.

Αυτή λέγεται και απλώς αντίσταση εκπομπού και ισχύει $r_e = \frac{V_T}{I_E}$.

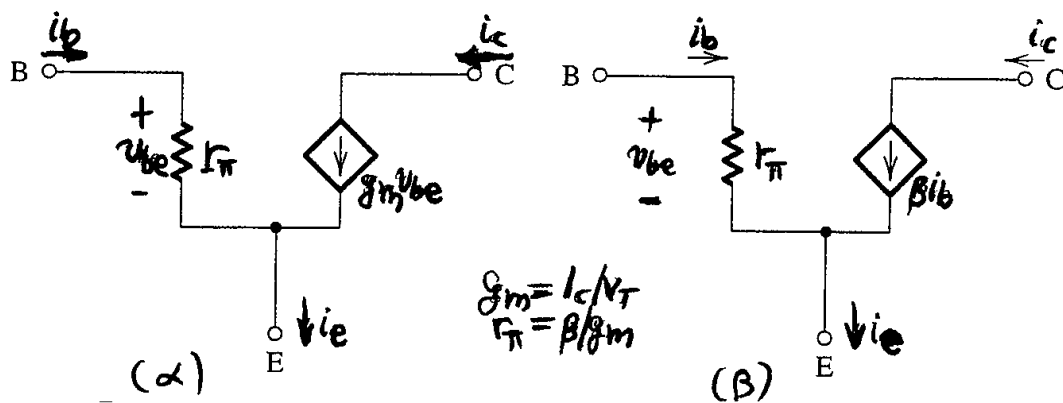
Αφού $g_m = \frac{I_C}{V_T}$ προκύπτει ότι $r_e = \frac{\alpha}{g_m} \approx \frac{1}{g_m}$ (εφόσον $\alpha \approx 1$).

Επίσης ισχύουν, $v_{be} = i_b r_\pi = i_e r_e$ άρα $r_\pi = \left(\frac{i_e}{i_b}\right) r_e$, επομένως $r_\pi = (\beta + 1) r_e$.

Αυτό σημαίνει ότι ένα σήμα v_{be} προκαλεί ρεύμα $g_m v_{be}$ στο συλλέκτη με φορά προς τα έξω. Δηλαδή το τρανζίστορ συμπεριφέρεται ως πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από τάση.

- ΤΟ ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ- π ΤΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ ΓΙΑ ΧΑΜΗΛΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

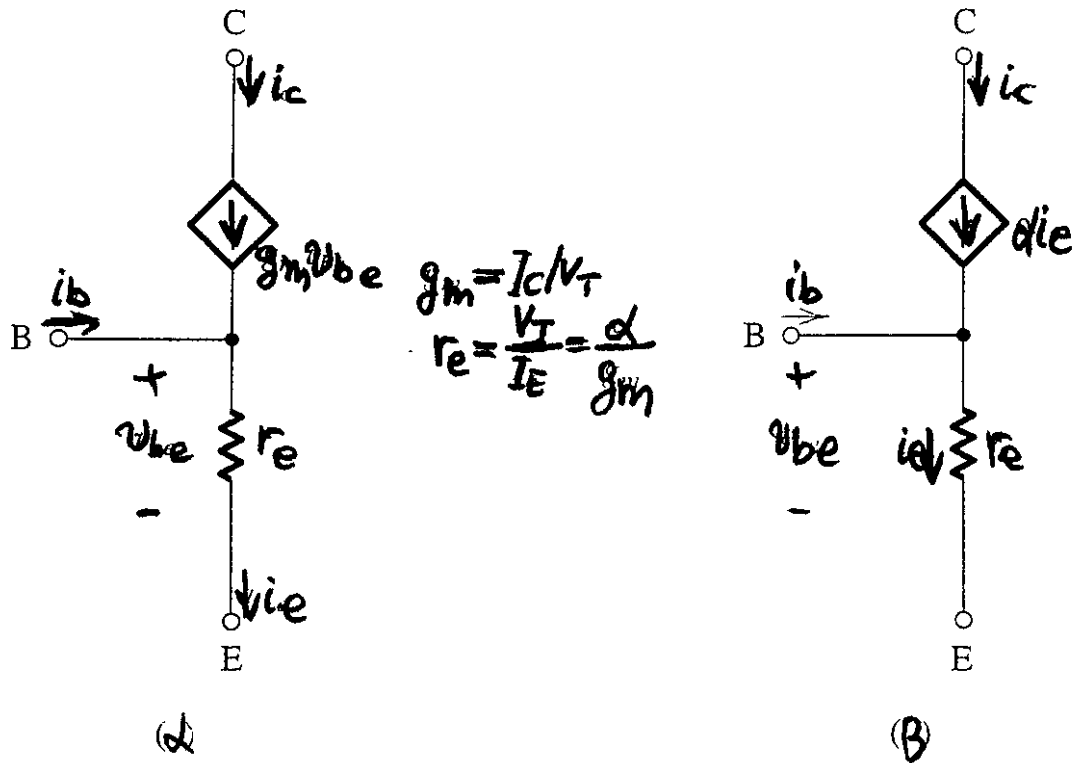
Αξιοποιώντας όσα προαναφέραμε είναι εύκολο να καταλήξουμε στο ότι το Σχήμα 4.21 παριστάνει τις δυο παραλλαγές του ισοδύναμου (ηλεκτροτεχνικού) κυκλώματος του BJT που λέγεται υβριδικό μοντέλο - π .



Σχήμα 4.21

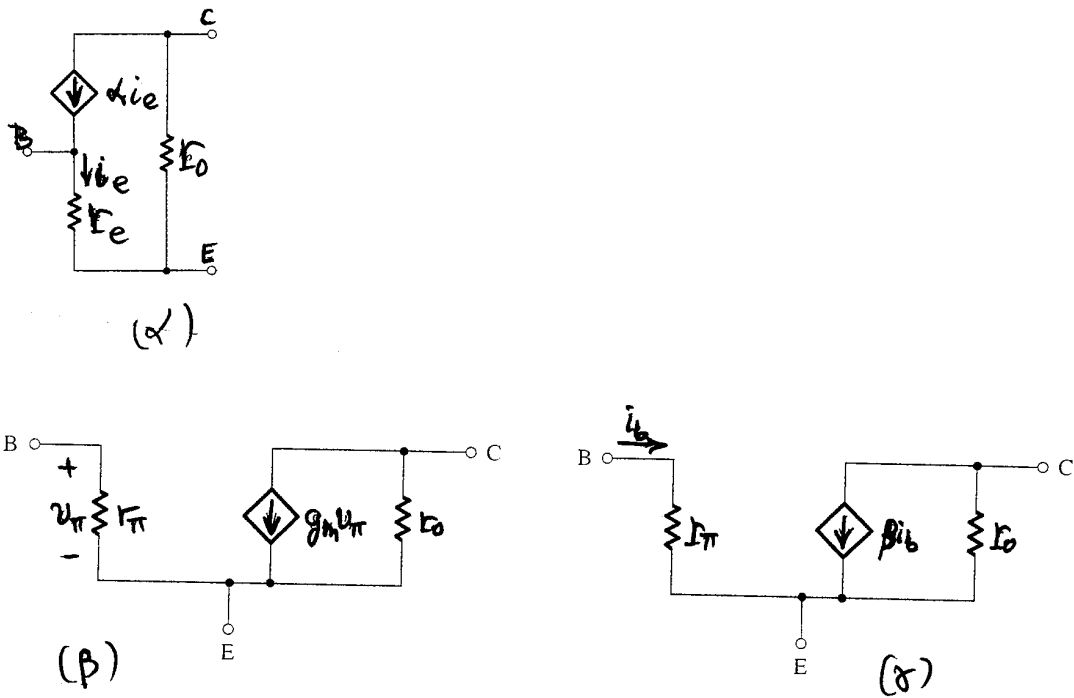
• MONTELO - T

Οι δύο παραλλαγές ενός άλλου μοντέλου, του μοντέλου -T φαίνονται στο Σχήμα 4.22.



Σχήμα 4.22

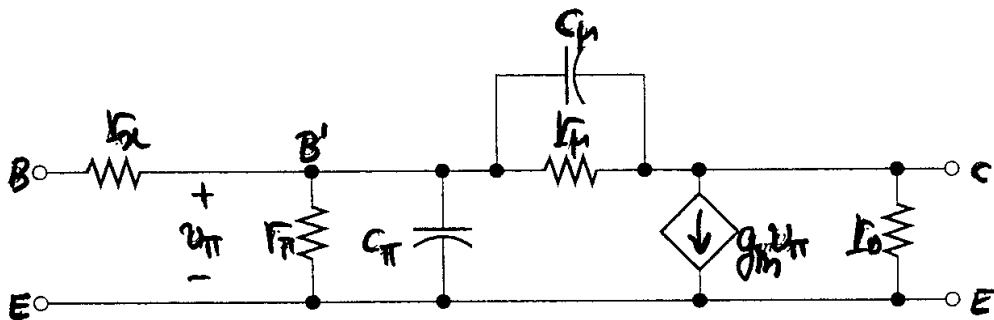
Στα Σχήματα 4.21α και 4.22α έχουμε πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από τάση, v_{be} , και στα Σχήματα 4.21β και 4.22β έχουμε πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από ρεύμα, i_e . Στο μοντέλο -T, υπεισέρχεται άμεσα η αντίσταση μεταξύ βάσης και εκπομπού καταλήγοντας μέσα στον εκπομπό δηλαδή η αντίσταση r_e . Αν θέλουμε να λάβουμε υπόψη το φαινόμενο early, πρέπει να προσθέσουμε τον αντιστάτη r_o . Τότε έχουμε τα ισοδύναμα κυκλώματα του Σχήματος 4.23.



Σχήμα 4.23

ΤΟ ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - π ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΙΚΟΥ ΤΡΑΝΖΙΣΤΟΡ (BJT) ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

Τα μοντέλα του BJT που αναφέραμε μέχρι τώρα, ισχύουν για χαμηλές συχνότητες. Το υβριδικό μοντέλο- π για όλες τις συχνότητες, Σχήμα 4.24, είναι πιο γενικό και για χαμηλές συχνότητες οδηγεί στα προηγούμενα μοντέλα.



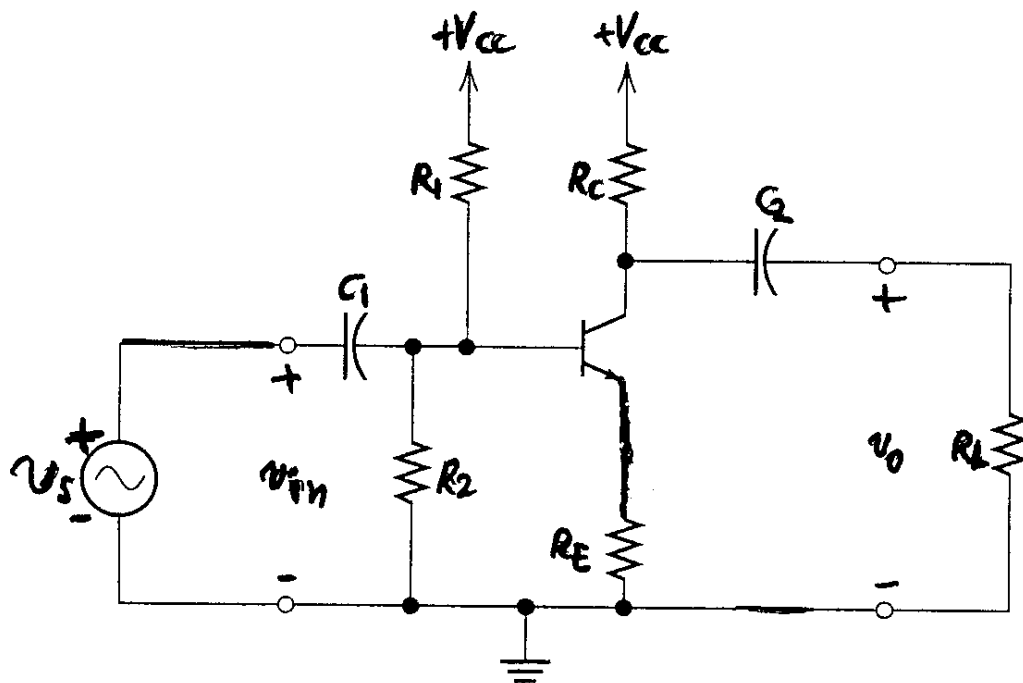
Σχήμα 4.24

Η αντίσταση r_x λέγεται αντίσταση περιοχής βάσης (base-spreading resistance) και είναι η (ωμική) αντίσταση του υλικού της βάσης. Η r_x είναι μικρή σε σχέση με την r_{π} . Η r_x είναι μεταξύ 10 Ω και 100 Ω για διατάξεις μικρών σημάτων. Δεν εξαρτάται σχεδόν καθόλου από το σημείο λειτουργίας του BJT. Η r_{π} είναι η γνωστή (διαφορική) αντίσταση της διεπαφής βάσης-εκπομπού, $r_{\pi} = \frac{\beta V_T}{I_{CQ}}$. Η r_{μ} σχετίζεται με την επίδραση της διαμόρφωσης εύρους - βάσης στη χαρακτηριστική εισόδου, δηλαδή

στην επίδραση στο i_B του v_{CE} . Εκφράζει την ανασύζευξη μεταξύ συλλέκτη βάσης. Η τιμή της r_μ είναι πολύ μεγάλη της τάξης μερικών ΜΩ. Η αντίσταση r_o σχετίζεται με την κλίση των χαρακτηριστικών εξόδου του τρανζίστορ. Η r_o συνδέεται με τη τάση του Early, V_A , και με το ρεύμα ηρεμίας I_{CQ} ως εξής: $r_o \approx \frac{V_A}{I_{CQ}}$

Η r_o είναι πολύ μεγάλη. Η χωρητικότητα C_μ είναι η χωρητικότητα απογύμνωσης της διεπαφής συλλέκτη - βάσης. Η τιμή της εξαρτάται από τη τάση V_{CBQ} και τον τύπο του τρανζίστορ. Στον πίνακα δεδομένων του συγκεκριμένου τύπου τρανζίστορ δίνεται αυτή η ποσότητα και παριστάνεται με το σύμβολο C_{obo} . Για το τρανζίστορ 2N2222A δίνεται ότι η μέγιστη τιμή του C_{obo} είναι 8 pF για $V_{CBQ} = 10$ V. Η χωρητικότητα C_π σχετίζεται με τη χωρητικότητα διάχυσης της διεπαφής βάσης - εκπομπού. Η τιμή της εξαρτάται από τον τύπο του τρανζίστορ και το σημείο ηρεμίας. Για διατάξεις μικρών σημάτων, τυπικές τιμές για το C_π είναι από 100 pF μέχρι 1000 pF.

ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΚΟΙΝΟΥ ΕΚΠΟΜΠΟΥ (CE) ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΕΚΠΟΜΠΟ

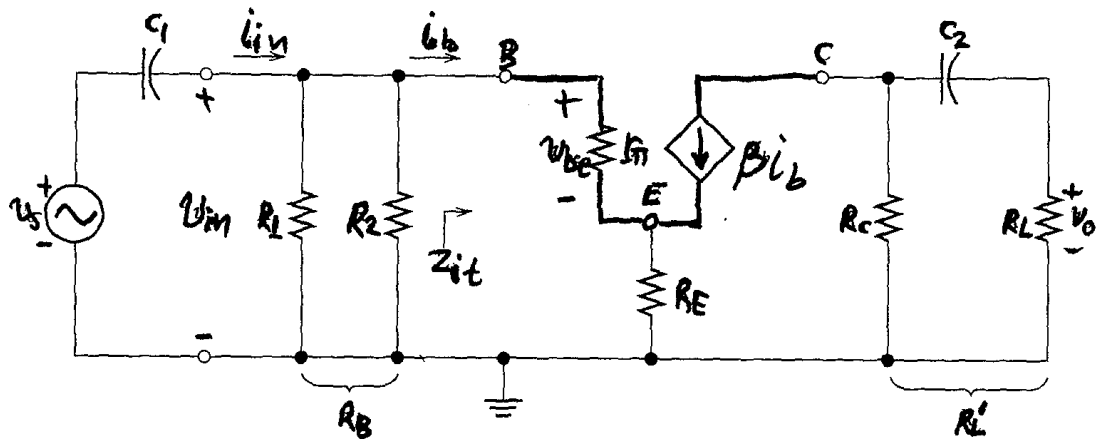


Σχήμα 4.25

Υποθέτουμε ότι οι συχνότητες που χρησιμοποιούμε είναι αρκετά χαμηλές ώστε να μην παίζουν ρόλο οι εσωτερικές χωρητικότητες του τρανζίστορ (δηλαδή χρησιμοποιούμε τα μοντέλα χαμηλών συχνοτήτων), αλλά μόνο οι εξωτερικές χωρητικότητες που είναι συνδεδεμένες ως πυκνωτές σύζευξης, C_1 , C_2 , βλ. Σχήμα 4.25.

Στην πραγματικότητα οι εσωτερικές χωρητικότητες μαζί με διάφορους αντιστάτες, δρουν ως βαθυπερατό φίλτρο και περιορίζουν τη μέγιστη συχνότητα που μπορεί να ενισχύσει το τρανζίστορ.

Το ισοδύναμο κύκλωμα μικρού σήματος (μοντέλο - π) φαίνεται στο Σχήμα 4.26.



Σχήμα 4.26

Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει τις συνεχείς συνιστώσες των τάσεων πόλωσης. Θα υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε σε μεσαίες συχνότητες οπότε αγνοούμε τους πυκνωτές C_1, C_2 . Υποθέτουμε ακόμη, ότι η αντίσταση της πηγής του σήματος είναι μηδέν.

Έχουμε επομένως ότι

$$R_s = 0 \text{ και } v_s = v_{in}$$

$$\text{Ισχύει η σχέση } R'_L = \frac{R_C \cdot R_L}{R_C + R_L}.$$

Έχουμε προφανώς $v_{in} = r_\pi i_b + R_E (\beta + 1) i_b$ και επίσης $v_o = -R'_L \beta i_b$.

$$\text{Η ενίσχυση τάσης είναι } A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{\beta R'_L}{r_\pi + (\beta + 1) R_E}$$

αν διαλέξουμε την R_E τόσο μεγάλη ώστε το r_π να μπορεί να παραληφθεί τότε έχουμε τη σχέση

$$A_v \approx -\frac{R'_L}{R_E} \quad (\text{προφανώς επειδή το } \beta \approx 100 \text{ ισχύει ότι } \beta + 1 \approx \beta)$$

Η εμπέδηση (εδώ απλώς αντίσταση) εισόδου $R_{it} = Z_{it}$ είναι

$$R_{it} = Z_{it} = \frac{v_{in}}{i_b} = r_\pi + (\beta + 1) R_E$$

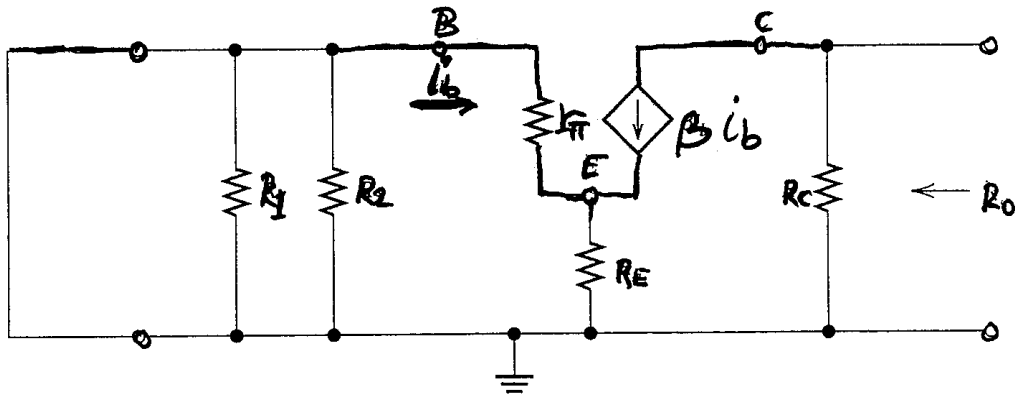
Ο πολλαπλασιασμός της ολικής αντίστασης του εκπομπού επί $(\beta + 1)$ για την εύρεση της αντίστασης εισόδου, κοιτάζοντας μέσα στη βάση του τρανζίστορ, λέγεται κανόνας ανάκλασης της αντίστασης.

Η αντίσταση εισόδου R_{in} , που βλέπει η πηγή εισόδου είναι ο παράλληλος

$$\text{συνδυασμός των } Z_{it} \text{ και } R_B, \text{ άρα } R_{in} = \frac{R_B Z_{it}}{R_B + Z_{it}} \quad \text{όπου } R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Η αντίσταση εξόδου R_o υπολογίζεται από το Σχήμα 4.27. Χρησιμοποιούμε ουσιαστικά το θεώρημα thevenin. Κάνουμε ανενεργή την ανεξάρτητη πηγή τάσης v_s . Στη συνέχεια φανταζόμαστε ότι στη δεξιά πλευρά του κυκλώματος εφαρμόζεται κάποια βοηθητική τάση v_x η οποία στέλνει ρεύμα i_x μέσα στο κύκλωμα. Προφανώς θα

$$\text{ισχύει } R_o = \frac{v_x}{i_x}.$$



Σχήμα 4.27

Προφανώς μεταξύ του σημείου B και γης υπάρχει βραχυκύκλωμα άρα ο κανόνας των τάσεων δίνει

$$i_b R_{ii} = 0 \text{ αφού προφανώς } R_{ii} \neq 0 \text{ έχουμε ότι } i_b = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ελεγχόμενη πηγή ρεύματος είναι ανενεργή επομένως είναι ανοιχτή και η αντίσταση του κλάδου της είναι άπειρη, άρα ισχύει

$$R_o = R_c$$

- Υπολογισμός της ενίσχυσης για χαμηλές συχνότητες όταν πρέπει να ληφθεί υπόψη ο πυκνωτής C_1 .

Σε αυτή τη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φάσορες γιατί έχουμε εξάρτηση από τη συχνότητα και θα κάνουμε την ανάλυση για μια συχνότητα. Προφανώς θα έχουμε τη σχέση (βλ. Σχήμα 4.25)

$$V_{in}/V_s = \frac{R_a}{R_a + \frac{1}{j\omega C_1}} \quad (\text{άρα έχουμε υψιπερατό φίλτρο}).$$

Προφανώς R_a είναι η ισοδύναμη αντίσταση που είναι συνδεδεμένη σε σειρά με τον πυκνωτή και ισχύει,

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{ii}}.$$

$$\text{Έχουμε: } A_{v1} = V_o/V_s = (V_o/V_{in})(V_{in}/V_s)$$

$$\text{άρα } A_{v1} = -\frac{R_a}{R_a + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot A_v$$

Αν η αντίδραση του C_1 είναι πολύ μικρή, τότε $A_{v1} = A_v$.

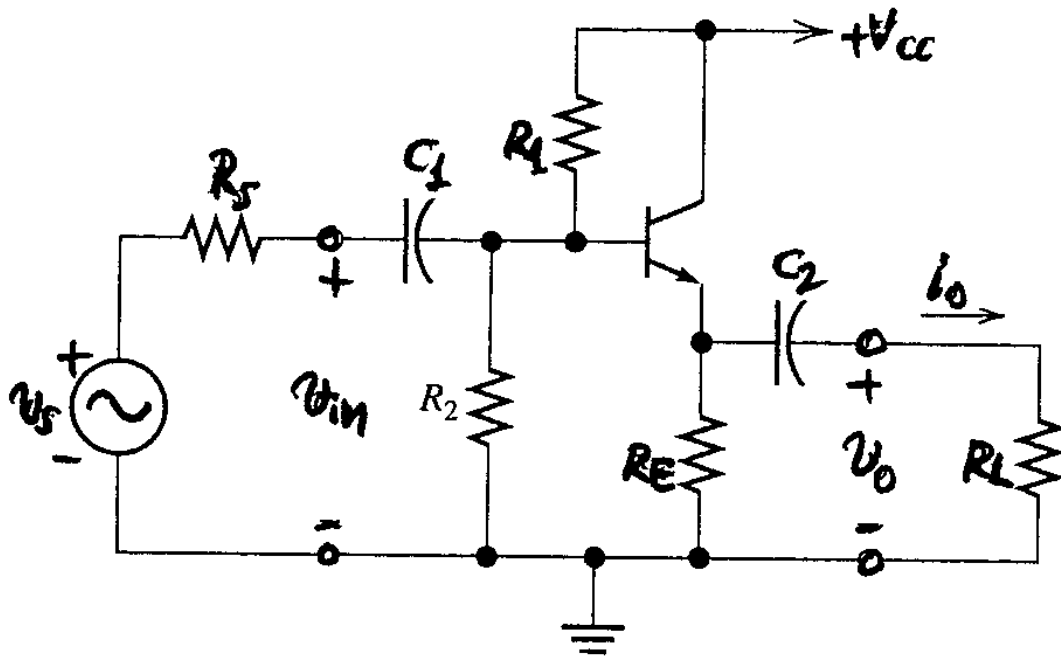
Μπορούμε να βρούμε κατά τα γνωστά τη συχνότητα καμψής (ή 3 dB), f_b , του υπερπαρατού φίλτρου. Γράφουμε τη σχέση στη μορφή, $A_{v1} = -A_v \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_a C_1}}$ Έχουμε

$$\text{επομένως } |A_{v1}| = |A_v| \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_b^2 / \omega^2}}$$

όπου $\omega_b = 2\pi f_b = \frac{1}{C_1 R_a}$ είναι η (κυκλική) συχνότητα καμψής.

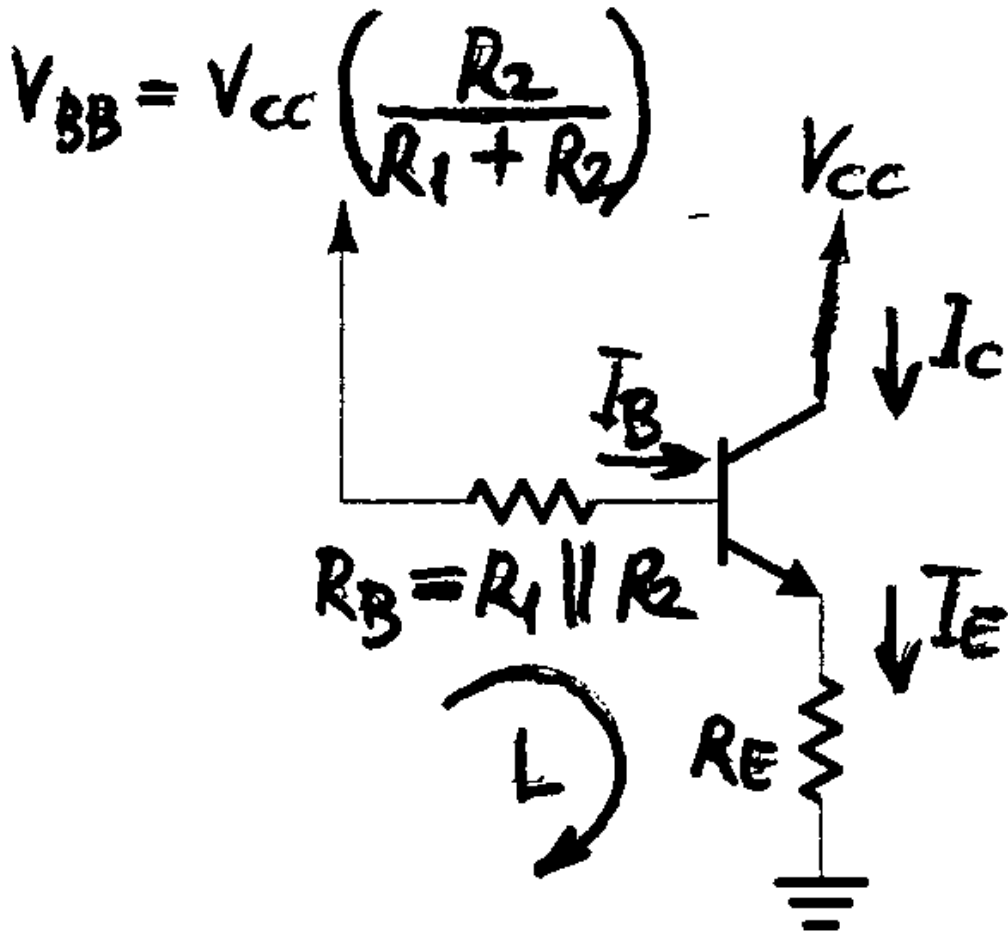
ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΛΛΕΚΤΗ (CC) (ΑΚΟΛΟΥΘΗΤΗΣ , ΑΚΟΛΟΥΘΟΣ)
(Emitter - Follower)

Έχουμε το ηλεκτρονικό κύκλωμα του Σχήματος 4.28 .



Σχήμα 4.28

Για τις συνεχείς συνιστώσες (πόλωση) έχουμε το Σχήμα 4.29.



Σχήμα 4.29

Έχομε τις σχέσεις

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_B = \frac{I_E}{\beta + 1} \quad \text{άρα} \quad I_E = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_E + R_B / (\beta + 1)} \quad (V_{BE} \approx 0,7 \text{ V}). \text{ Ισχύει } I_C = \alpha I_E \approx I_E. \text{ Για να}$$

μην εξαρτάται πολύ το I_E από το β και το V_{BE} , συνήθως προσέχουμε ώστε $V_{BB} \gg V_{BE}$

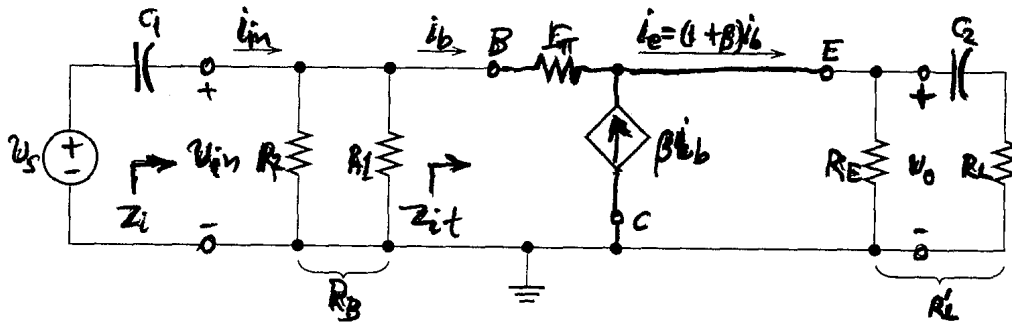
και $R_E \gg \frac{R_B}{\beta + 1}$ ($\beta \approx 100$). Το V_E το παίρνουμε να είναι περίπου $\frac{1}{2} V_{CC}$ ώστε να

μπορούμε να έχουμε μεγάλα σήματα χωρίς παραμόρφωση. Το ρεύμα του διαιρέτη τάσης R_1, R_2 πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο από το ρεύμα της βάσης, I_B , και

επιλέγεται να είναι μεταξύ I_E και $0,1 I_E$. Το $I_C \approx I_E \approx \frac{V_B - 0,7 \text{ V}}{R_E}$. $V_E = I_E R_E$,

$$V_B \approx 0,7 \text{ V} + I_E \cdot R_E.$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα ασθενούς σήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.30. Θεωρούμε ότι η αντίσταση της πηγής σήματος, $R_s = 0$. Επίσης θεωρούμε ότι η αντίσταση εξόδου r_o του τρανζίστορ είναι άπειρη. Εργαζόμαστε σε μεσαίες συχνότητες οπότε θεωρούμε τους πυκνωτές βραχυκυκλωμένους.



Σχήμα 4.30

Η ενίσχυση τάσης είναι,

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} \quad \text{Το ρεύμα δια μέσου της } R_L' \text{ είναι } i_c = i_b + \beta i_b \text{ άρα } v_o = (\beta + 1)R_L' i_b$$

Έχουμε από το κανόνα των βρόχων $v_{in} = r_{\pi} i_b + (\beta + 1) i_b R_L'$.

Επομένως

$$A_v = \frac{(\beta + 1)R_L'}{r_{\pi} + (\beta + 1)R_L'}$$

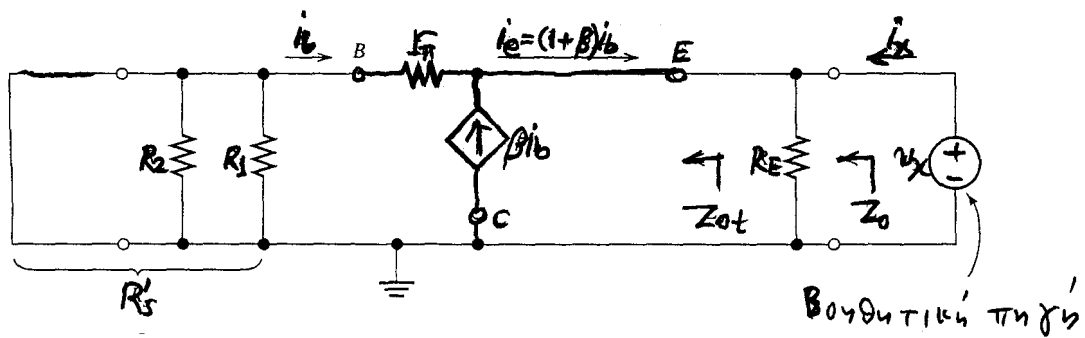
Η απολαβή είναι μικρότερη της μονάδας αλλά στην πράξη είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Ο ενισχυτής αυτός δεν κάνει αναστροφή σήματος και ουσιαστικά η τάση εξόδου ακολουθεί την τάση εισόδου και για αυτό λέγεται και ακόλουθος.

Η αντίσταση (εμπέδηση) εισόδου είναι ο παράλληλος συνδυασμός των R_B και $Z_{it} = R_{it}$.

Επομένως με χρήση προηγούμενης σχέσης βρίσκουμε

$$Z_{it} = R_{it} \frac{v_{in}}{i_b} = r_{\pi} + (\beta + 1)R_L'$$

Για τον υπολογισμό της αντίστασης εξόδου, R_o , έχουμε το κύκλωμα του Σχήματος 4.31.



Σχήμα 4.31

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα thevenin.

Εισάγουμε τη βοηθητική τάση v_x και το αντίστοιχο ρεύμα i_x . Ισχύει $R_o = Z_o = \frac{v_x}{i_x}$.

Έχουμε κάνει την ανεξάρτητη πηγή (τάσης) σήματος ανενεργή, άρα $v_s = 0$ και τη θεωρούμε βραχυκυκλωμένη.

Από το νόμο των κόμβων στο πάνω άκρο της R_E καταλήγουμε στη σχέση

$$i_b + \beta i_b + i_x = \frac{v_x}{R_E}$$

Προφανώς $R'_S = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Από τον κανόνα των τάσεων έχουμε $v_x + r_\pi i_b + R'_S i_b = 0$

Άρα τελικώς $R_o = Z_o = \frac{v_x}{i_x} = \frac{1}{(\beta + 1)/(R'_S + r_\pi) + (1/R_E)}$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι η αντίσταση εξόδου είναι ο παράλληλος συνδυασμός της R_E και της Z_{ot} όπου

$$Z_{ot} = \frac{R'_S + r_\pi}{(\beta + 1)} \quad \text{δηλαδή} \quad R_o = R_E // Z_{ot}$$

Z_{ot} είναι η αντίσταση (εμπέδηση), κυττάζοντας μέσα στον εκπομπό του τρανζίστορ.

Αν λάβουμε υπόψη τον πυκνωτή C_1 τότε έχουμε όπως και στην περίπτωση του ενισχυτή κοινού εκπομπού (CE) υπερπαρατό φίλτρο, πράγματι,

έστω ότι $R_a = R_1 // R_2 // Z_{it}$

προφανώς θα ισχύει,

$$\frac{V_{in}}{V_s} = \frac{R_a}{R_a + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_a}}$$

Έχουμε βρει ότι $A_v = \frac{(\beta + 1)R'_L}{r_\pi + (\beta + 1)R'_L}$ προφανώς $A_v = V_o / V_{in}$

Επομένως όπως και στην περίπτωση του ενισχυτή CE έχουμε

$$A_{v1} = V_o/V_s = (V_o/V_{in})(V_{in}/V_s) = A_v = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_a}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_b}{\omega}}$$

Προφανώς ω_b είναι η κυκλική συχνότητα καμψής και ισχύει

$$\omega_b = \frac{1}{C_1 R_a}$$

Ο ενισχυτής κοινού συλλέκτη (CC) χρησιμοποιείται πολλές φορές ως απομονωτής (buffer), επειδή μπορεί να έχει μεγάλη αντίσταση εισόδου, R_i , ώστε να μην επηρεάζει το κύκλωμα που του παρέχει το σήμα και μικρή αντίσταση εξόδου, R_o , ώστε να μπορεί να τροφοδοτήσει άλλο κύκλωμα, συνδεδεμένο στην έξοδο του, με σχετικά μεγάλο ρεύμα χωρίς να επηρεάζεται σημαντικά η τάση εξόδου v_o .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, Συγγρ. Εμμ. Ν. Πρωτονοτάριος,
Μιχ. Ε. Θεολόγου, Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Αθήνα 1995
2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, Συγγρ. Ι. Δ. Κανελλόπουλος,
Χ. Ν. Βεζούρας, Σ. Ν. Λιβιεράτος, Εκδόσεις ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ,
Αθήνα 1995
3. Ο Μετασχηματισμός LAPLACE και οι εφαρμογή του στην
Ανάλυση Γραμμικών Κυκλωμάτων, Διδακτικές Σημειώσεις
Συγγρ. Ιάκ. Στ. Βενιέρης, Έκδοση ΕΜΠ, 1997
4. LINEAR CIRCUIT ANALYSIS, By R. A. De Carlo, Pen-MinLin,
Prentice Hall, 1995
5. THE ANALYSIS OF LINEAR CIRCUITS, By Charles M. Close,
Harcourt, Brace & World, Inc., 1966
6. Electronics with Digital and Analog Integrated Circuits,
By Richard J. Higgins, Prentice-Hall, Inc., 1983
7. Microelectronic Circuits, Fourth Edition, By Adel S. Sedra,
Kenneth C. Smith, Oxford University Press, 1998
ΜΙΚΡΟΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, Τόμ. Α & Β,
Συγγρ. Adel S. Sedra, Kenneth C. Smith,
Επιμέλεια Ελληνικής Έκδοσης Γιάννης Ε. Παπανάνος,
Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1994
8. Electronics, Second Edition, By Allan R. Hambley,
Prentice Hall, 2000
9. The ART OF ELECTRONICS, By P. Horowitz, W. Hill,
Cambridge Univ. Press, 1989

